1Б

УДК 510.22

А.Б. Петровский
Институт системного анализа РАН, г. Москва

Мультимножества как модель представления многопризнаковых объектов в принятии решений и распознавании образов*

Авторы исследуют математические модели мультимножества (ММ) или множества с повторяющимися элементами предназначенные для представления и исследования определенного рода объектов (проектов, символов, документов). Возможность присутствия в ММ произвольного, в том числе и неограниченного, числа компонент и произвольного количества экземпляров любого из элементов принципиально отличает ММ от множества. Эта особенность порождает целый ряд свойств ММ как качественно нового математического объекта в принятии решений и распознавании образов.

Введение

В теории принятия решений, распознавании образов, теории формальных языков, математическом программировании, методах построения баз разнородной информации и ее обработки, теории сетей Петри и во многих других областях имеется достаточно широкий круг проблем, когда рассматриваемые объекты характеризуются многими разнородными признаками (атрибутами), которые могут быть и количественными и качественными, и, кроме того, одни и те же объекты могут существовать в нескольких экземплярах с отличающимися или похожими значениями признаков, свертка которых или невозможна, или математически некорректна. Рассмотрим несколько примеров.

Пусть $X=\{A_1,\ldots, A_k\}$ – совокупность k проектов, оцениваемых n экспертами по m качественным критериям $Q_1,\ldots,Q_m$, каждый из которых имеет номинальные или порядковые шкалы вербальных оценок $\{q_s^{e_s}\}$, $s=1,\ldots,m$; $e_s=1,\ldots,h_s$. Поскольку проект оценивается несколькими экспертами, некоторые оценки могут встречаться в его описании несколько раз. Каждый проект A_i можно представить как множество повторяющихся элементов $A_i=\{n_i(g_1)\bullet g_1,\ldots,n_i(g_h)\bullet g_h\}$, где $g_j=q_s^{e_s}$ – элемент множества $G=\{g_1,\ldots,g_h\}$, $h=h_1+\ldots+h_m$; $n_i(g_j)$ – число элементов

* Работа выполнена при финансовой поддержке РФФИ (проект № 02-01-01077) и РАН (проект 2.33 программы научных исследований «Математическое моделирование, интеллектуальные системы и управление нелинейными механическими системами»).

g_j, равное числу экспертов, давших проекту A_i критериальную оценку $q_s^{e_s}$; знак • обозначает повтор элементов g_j.

Пусть $X=\{A_1,\ldots, A_k\}$ – коллекция графических символов, распознаваемых с помощью некоторого алгоритма из множества стандартных символов $G=\{g_1,...,g_h\}$. Результат распознавания символа A_i может быть выражен следующим образом: $A_i=\{n_i(g_1)\bullet g_1,...,n_i(g_h)\bullet g_h\}$, где $n_i(g_j)$ есть вычисленная оценка данного символа A_i по отношению к стандартному символу g_j.

Пусть теперь $X=\{A_1,\ldots, A_k\}$ – файл текстовых документов, относящихся к некоторой предметной области. Предположим, что содержание документа выражается с помощью так называемых лексических единиц (дескрипторов, ключевых слов, терминов), множество которых образует тезаурус или проблемно-ориентированный терминологический словарь $G=\{g_1,...,g_h\}$. В этом случае каждый текстовый документ A_i можно рассматривать как совокупность повторяющихся лексических единиц и представить его в виде $A_i=\{n_i(g_1)\bullet g_1,...,n_i(g_h)\bullet g_h\}$, где $n_i(g_j)$ равно числу лексических единиц g_j в описании документа A_i.

Удобной математической моделью для представления и исследования такого рода объектов (проектов, символов, документов) являются мультимножества (ММ) или множества с повторяющимися элементами [2], [4-6]. ММ, как и обычное множество, есть совокупность элементов произвольной природы. Однако в отличие от множеств один и тот же элемент может присутствовать в ММ многократно, и кратность вхождения элемента является существенной особенностью мультимножеств.

1. Мультимножество и его характеристики

Мультимножеством A, порожденным обычным множеством $U=\{x_1,x_2,\ldots\}$, все элементы x_i которого различны, называется совокупность групп элементов вида $A=\{n_A(x)\bullet x \mid x\in U,\ n_A(x)\in Z^+\}$, где функция $n_A(x)$ называется *функцией числа экземпляров* ММ A и определяет, сколько раз элемент $x_i\in U$ входит в ММ A. Символ • обозначает кратность вхождения элемента в соответствующую компоненту ММ. Если кратность элемента x равна нулю $n_A(x)=0$, то элемент x не содержится в ММ A. Функция $\chi_A(x)=\{0,1\}$, где $\chi_A(x)=1$ при $x\in A$, называется *характеристической функцией* ММ A. *Мощность* ММ $|A|=\Sigma_x n_A(x)$ определяется как общее число экземпляров всех его элементов; *размерность* ММ $/A/=\Sigma_x\chi_A(x)$ – как общее число различных элементов. Множество S называется *доменом* для семейства ММ А , если все ММ этого семейства образуются из элементов множества S. *Высотой* ММ A называется максимальное значение функции кратности $\mathrm{hgt}A = \max_{x\in S} n_A(x)$, а элемент x_{A^*}, для которого функция $n_A(x)$ максимальна, – *пиковым элементом* ММ A. *Опорным множеством* или *носителем* ММ A называется обычное множество $\mathrm{Supp}A=\{x \mid x\in S,\ \chi_{\mathrm{Supp}A}(x)=\chi_A(x)\}$, состоящее из единичных экземпляров всех элементов, которые входят в ММ.

Если функцию числа экземпляров ММ $n_A(x)$ положить равной его характеристической функции $\chi_A(x)$, то ММ A становится обычным множеством A. При этом компонента ММ, состоящая из нескольких одинаковых элементов, сократится до одного единственного элемента, мощность ММ $|A|$ окажется равной его размерности $/A/$, а носитель ММ Supp$A$ совпадет с самим ММ A. Выражение, определяющее носитель ММ Supp$A$, можно считать также формальным определением некоторой унарной операции, которая задает отображение Supp: $Z^+ \to \{0,1\}$ и представляет собой логический предельный переход от ММ к множествам.

Установим правила сравнения мультимножеств. ММ A и B называются *равными* ($A=B$), если $\forall x \in S$ $n_A(x)=n_B(x)$. Если условие равенства значений функций кратности нарушается хотя бы для одного элемента x, то есть $\exists x \in S$, $n_A(x) \neq n_B(x)$, то будем говорить, что ММ A и B *неравны* ($A \neq B$). Равные ММ имеют равные мощности, размерности, высоты и пиковые элементы: $|A|=|B|$, $/A/=/B/$, hgt$A$=hgt$B$, $x_{A^*}=x_{B^*}$, а их носители совпадают: Supp$A$=Supp$B$. Для ММ можно определить и другие виды равенства. ММ A и B будем называть *равномощными*, если равны их мощности $|A|=|B|$; *равноразмерными*, если равны их размерности $/A/=/B/$; *равновеликими*, если они равномощны и равноразмерны. Равные ММ равновелики, то есть равномощны $|A|=|B|$ и равноразмерны $/A/=/B/$. Обратные утверждения, вообще говоря, неверны. В самом деле, мультимножества, имеющие равные мощности, равные размерности и даже одинаковые носители, не обязательно равны, так как могут существовать такие элементы $x \in S$, для которых $n_A(x) \neq n_B(x)$. Нетрудно убедиться, что для равновеликих, но не равных ММ имеется не меньше двух таких элементов. Очевидно, что равноразмерные ММ могут быть неравномощными, а равномощные ММ могут иметь разную размерность.

Будем говорить, что ММ B *содержится* в ММ A или *B включено в A* ($B \subseteq A$), если $\forall x \in S$, $n_B(x) \leq n_A(x)$. ММ B называется тогда *подмультимножеством* (подММ) ММ A, а ММ A – *надмультимножеством* ММ B. Мощность, размерность и высота подММ B не превосходят мощности, размерности и высоты ММ A: $|B| \leq |A|$, $/B/ \leq /A/$, hgt$B\leq$hgt$A$, пиковые элементы могут быть различными $x_{A^*} \neq x_{B^*}$, а носитель ММ B содержится в носителе ММ A: Supp$B\subseteq$Supp$A$. Обратные утверждения неверны.

ММ A и B будем называть *S-эквивалентными* или *гомогенно эквивалентными* ($A \cong B$), если их носители совпадают Supp$A$=Supp$B$ и существует взаимно однозначное соответствие f между одноименными компонентами ММ: $\forall x \in S$, $n_B(x)=f(n_A(x))$, где f – целочисленная функция с областью значений Z^+. S-эквивалентные ММ равноразмерны $/B/=/A/$, их мощности и высоты связаны соотношениями $|B|=f(|A|)$, hgt$B$=f(hgt$A$), и одно из ММ является подММ другого. Равенство ММ является одним из частных случаев S-эквивалентности. Укажем некоторые другие виды S-эквивалентности ММ. ММ A и B будем называть *сдвинутыми*, если $\forall x \in S$, $n_B(x)=n_A(x)+p$, $p \geq 0$ – целое; и *растянутыми* или *пропорциональными*, если $\forall x \in S$, $n_B(x)=kn_A(x)$, $k \geq 1$ – целое. Пропорциональные и сдвинутые ММ равноразмерны $/A/=/B/$, а их пиковые элементы и носители совпадают: $x_{A^*}=x_{B^*}$, Supp$A$=Supp$B$. Мощности и высоты сдвинутых ММ связаны соотношениями $|B|=|A|+p/A/$, hgt$B$=hgt$A+p$, а пропорциональных ММ – $|B|=k|A|$, hgt$A$=$k\cdot$hgt$B$.

ММ A и B будем называть *D-эквивалентными* или *гетерогенно эквивалентными* ($A \approxeq B$), если их носители эквивалентны Supp$A$~Supp$B$ и существует взаимно однозначное соответствие f между разноименными компонентами ММ: $n_B(x_i)=f(n_A(x_j))$, $x_i,x_i \in S$, где f – целочисленная функция с областью значений Z^+. D-эквивалентные, ММ равноразмерны $/B/=/A/$, а их носители равномощны |Supp$A$|=|Supp$B$|, но в общем случае не обязательно одинаковы Supp$A\neq$Supp$B$. Мощности и высоты D-эквивалентных ММ связаны соотношениями $|B|=f(|A|)$, hgt$B$=f(hgt$A$), при этом никакое из ММ не является подММ другого. Переобозначая элементы $x_i \to x_j$ в одном из D-эквивалентных ММ, их можно сделать S-эквивалентными. Выделим один важный частный случай D-эквивалентности ММ. ММ A и B будем называть *равносоставленными* или *соразмерными*, если их носители эквивалентны $\mathrm{Supp}A \sim \mathrm{Supp}B$, а разноименные компоненты равны, то есть $n_A(x_i)=n_B(x_j)$, $x_i, x_j \in S$. Равносоставленные ММ равновелики, то есть $|A|=|B|$ и $/A/=/B/$, но не равны. Высоты равносоставленных ММ равны $\mathrm{hgt}A=\mathrm{hgt}B$, а пиковые элементы могут как совпадать $x_{A^*}=x_{B^*}$, так и не совпадать $x_{A^*} \neq x_{B^*}$. Равные ММ равносоставлены, обратное утверждение неверно. Равносоставленные ММ становятся равными, если в одном из них выполнить переобозначение элементов $x_i \to x_j$.

ММ, не имеющее элементов, называется *пустым* $\varnothing=\{n_\varnothing(x)\bullet x \mid \forall x \in U, n_\varnothing(x)=0\}$. Мощность, размерность и высота пустого ММ равны нулю: $|\varnothing|=/\varnothing/=\mathrm{hgt}\varnothing=0$, а носитель пустого ММ – тоже пустое множество $\mathrm{Supp}\varnothing=\varnothing$. Если все ММ какого-либо семейства ММ А над доменом S являются подММ некоторого ММ Z ($A \subseteq Z$) и для $\forall x \in S$, $n_A(x) \le n_Z(x)$, то такое ММ Z будем называть *универсумом* или *максимальным мультимножеством*. Формально в роли универсума Z может выступать, например, ММ с функцией кратности $n_Z(x) = \max\limits_{A \in \mathbf{A}} n_A(x)$, $\forall x \in U$.

ММ, кратность всех элементов которого одинакова и равна h=const, будем называть *постоянным* (*константным*) $C_{\{h\}}=\{n_{C\{h\}}(x)\bullet x \mid \forall x \in C_{\{h\}}, n_{C\{h\}}(x)=h, h \in \mathrm{Z}^+\}$. Мощность и размерность постоянного ММ связаны соотношением: $|C_{\{h\}}|=h \cdot /C_{\{h\}}/$, а высота равна $\mathrm{hgt}C_{\{h\}}=h$. Пиковым элементом $x_{C\{h\}^*}$ является любой элемент постоянного ММ. Всякое постоянное ММ $C_{\{h\}}$ можно рассматривать как ММ сдвинутое на $h-1$ единиц или растянутое в h раз по отношению к своему носителю. Как следует из приведенного определения, пустое ММ $\varnothing$ является постоянным ММ $C_{\{0\}}$ высоты 0 с функцией числа экземпляров $n_{C\{0\}}(x)=n_\varnothing(x)=0$ для всех $x \in U$. Любое множество B, а следовательно, и основное множество U, и домен S, и носитель любого ММ A являются постоянными ММ $B_{\{1\}}$ высоты 1 с функциями кратности $n_{B\{1\}}(x)=1$, определения которых можно формально записать в виде: $U=\{n_U(x)\bullet x \mid \forall x \in U, n_U(x)=1\}$, $S=\{n_S(x)\bullet x \mid \forall x \in S, n_S(x)=1\}$, $\mathrm{Supp}A=\{n_{\mathrm{Supp}A}(x)\bullet x \mid \forall x \in A, n_{\mathrm{Supp}A}(x)=1\}$.

2. Операции над мультимножествами и их свойства

Введем следующие основные операции над ММ:

объединение $A \cup B = \{n_{A\cup B}(x)\bullet x \mid n_{A\cup B}(x)=\max(n_A(x), n_B(x))\}$; (1)

пересечение $A \cap B = \{n_{A\cap B}(x)\bullet x \mid n_{A\cap B}(x)=\min(n_A(x), n_B(x))\}$; (2)

арифметическое сложение $A+B = \{n_{A+B}(x)\bullet x \mid n_{A+B}(x)=n_A(x)+n_B(x)\}$; (3)

арифметическое вычитание $A-B = \{n_{A-B}(x)\bullet x \mid n_{A-B}(x)=n_A(x)-n_{A\cap B}(x)\}$; (4)

симметрическая разность $A\Delta B = \{n_{A\Delta B}(x)\bullet x \mid n_{A\Delta B}(x)=|n_A(x)-n_B(x)|\}$; (5)

дополнение $\overline{A}=Z-A=\{n_{\overline{A}}(x)\bullet x \mid n_{\overline{A}}(x)=n_Z(x)-n_A(x)\}$; (6)

умножение на число (*репродукция*) $k \cdot A = \{n_{k\cdot A}(x)\bullet x \mid n_{k\cdot A}(x) = kn_A(x), k \in \mathrm{N}\}$; (7)

арифметическое умножение $A \cdot B = \{n_{A\cdot B}(x)\bullet x \mid n_{A\cdot B}(x)=n_A(x)\cdot n_B(x)\}$; (8)

арифметическая n-ая степень $A^n = \{n_{A^n}(x)\bullet x \mid n_{A^n}(x)=(n_A(x))^n\}$; (9)

прямое произведение $A\times B = \{n_{A\times B}\bullet\langle x_i, x_j\rangle \mid n_{A\times B}=n_A(x_i)\cdot n_B(x_j),\ x_i\in A,\ x_j\in B\}$; (10)

прямая n-ая степень $(\times A)^n = \left\{ n_{(\times A)^n} \bullet \langle x_1,...,x_n\rangle \,\middle|\, n_{(\times A)^n} = \prod_{i=1}^{n} n_A(x_i),\ x_i \in A \right\}$. (11)

В теории множеств операции арифметического сложения (3), умножения на число (7), арифметического умножения (8) и возведения в степень (9) в общем случае не определяются. Аналогами этих операций могут служить соответственно операции покомпонентного сложения и умножения на скаляр векторов $\mathbf{a}+\mathbf{b}=(a_1+b_1,\dots,a_n+b_n)$, $k\cdot\mathbf{a}=(ka_1,\dots,ka_n)$ в векторной алгебре, поэлементного сложения и умножения на число матриц $\mathrm{A}+\mathrm{B}=\|a_{ij}+b_{ij}\|_{m\times n}$, $k\cdot\mathrm{A}=\|k\ a_{ij}\|_{m\times n}$ в матричной алгебре, поэлементного умножения матриц $\mathrm{A}\cdot\mathrm{B}=\|a_{ij}\cdot b_{ij}\|_{m\times n}$ в алгебраической теории распознавания образов [1]. Последняя операция отличается от традиционной операции умножения матриц. При переходе к множествам операции арифметического умножения и возведения в степень ММ вырождаются в операцию пересечения множеств, а операции арифметической суммы множеств и умножения множества на число будут неосуществимы.

Носители объединения и арифметической суммы, пересечения и арифметического произведения ММ определяются по следующим правилам:

$\mathrm{Supp}(A \cup B) = (\mathrm{Supp}A) \cup (\mathrm{Supp}B) = \mathrm{Supp}(A+B)$, (12)

$\mathrm{Supp}(A \cap B) = (\mathrm{Supp}A) \cap (\mathrm{Supp}B) = \mathrm{Supp}(A\cdot B)$. (13)

Носители ММ, репродукции и арифметической n-ой степени ММ совпадают:

$\mathrm{Supp}(k\cdot A) = \mathrm{Supp}A^n = \mathrm{Supp}A$. (14)

Носитель прямого произведения ММ и прямой n-ой степени ММ определяются как

$\mathrm{Supp}(A_1\times B) = (\mathrm{Supp}A)\times (\mathrm{Supp}B)$, $\mathrm{Supp}(\times A)^n = (\times \mathrm{Supp}A)^n$. (15)

Носители арифметической разности и симметрической разности ММ в общем случае не совпадают с разностями носителей вычитаемых ММ, а носитель дополнения ММ – с дополнением носителя:

$(\mathrm{Supp}A)\backslash(\mathrm{Supp}B) \subseteq \mathrm{Supp}(A-B)$, $(\mathrm{Supp}A)\Delta(\mathrm{Supp}B) \subseteq$

$\subseteq \mathrm{Supp}(A\Delta B)$, $\overline{\mathrm{Supp}A} \subseteq \mathrm{Supp}\,\overline{A}$. (16)

Однако между носителями вычитаемых ММ имеется следующая изящная связь

$\mathrm{Supp}(A\Delta B)=(\mathrm{Supp}(A-B)) \cup (\mathrm{Supp}(B-A))$,

$(\mathrm{Supp}A)\Delta(\mathrm{Supp}B)=(\mathrm{Supp}A\backslash\mathrm{Supp}B) \cup (\mathrm{Supp}B\backslash\mathrm{Supp}A)$. (17)

Первые равенства в выражениях (12), (13) совпадают с аналогичными соотношениями для носителей нечетких множеств [3].

В теории ММ допускается возможность существования большего числа операций над ММ, чем в теории множеств. Соответственно разнообразнее будут и свойства таких операций. Многие из них совпадают со свойствами операций над множествами и могут быть распространены на аналогичные и новые типы операций, присущих ММ. Некоторые свойства операций, которыми обладают множества, у ММ отсутствуют. Но появляется и ряд новых свойств, не имеющих аналогов для множеств. Приведем основные свойства операций над ММ:

идемпотентность объединения и пересечения

$A \cup A = A$; $A \cap A = A$;

инволюция или *двойное отрицание*

$\overline{(\overline{A})} = A$;

идентичность

$A \cup Z = A+\overline{A} = Z$; $A \cap S = S$;

$A \cap Z = A \cup S = A \cup \emptyset = A+\emptyset = A-\emptyset = A\Delta A = A\cdot S = Z-\overline{A} = A$;

$A \cap \emptyset = A-A = \emptyset-A = A\Delta A = A\cdot\emptyset = \emptyset$;

коммутативность объединения, пересечения, симметрической разности, репродукции, арифметического сложения и умножения

$A \cup B = B \cup A$; $A \cap B = B \cap A$; $A\Delta B = B\Delta A$; $A+B = B+A$; $k\cdot B = A\cdot k$; $A\cdot B = B\cdot A$;

ассоциативность объединения, пересечения, сложения, арифметического и прямого умножения

$(A \cup B) \cup C = A \cup (B \cup C)$; $(A \cap B) \cap C = A \cap (B \cap C)$; $(A+B)+C = A+(B+C)$;

$(A\cdot B)\cdot C = A\cdot(B\cdot C)$; $(A\times B)\times C = A\times(B\times C)$;

дистрибутивность слева и справа объединения и пересечения относительно друг друга, сложения, вычитания, репродукции, арифметического умножения и прямого произведения; сложения, вычитания и симметрической разности относительно репродукции, арифметического умножения и прямого произведения (соответствующие формулы не выписываем ввиду их многочисленности);

двойственность объединения и пересечения

$$\overline{A \cup B} = \overline{A} \cap \overline{B},\ C-(A \cup B) = (C-A) \cap (C-B);\ \overline{A \cap B} = \overline{A} \cup \overline{B},\ C-(A \cap B) = A) \cup (C-B); \quad (18)$$

двойственность арифметического сложения и вычитания

$$\overline{A+B} = \overline{A}-B = \overline{B}-A, \qquad C-(A+B) = (C-A)-B = (C-B)-A;$$

$$\overline{A-B} = \overline{A}+B, \qquad C-(A-B) = (B+C)-A = B+(C-A);$$

$$\overline{A}-\overline{B} = B-A,\ (C-A)-(C-B) = B-A. \quad (19)$$

Операции репродукции, арифметического умножения и прямого произведения обладают также свойством, которое назовем *слабой дистрибутивностью*

$$k\cdot(A\cdot B) = (k\cdot A)\cdot B = A\cdot(k\cdot B); \qquad k\cdot(A\times B) = (k\cdot A)\times B = A\times(k\cdot B);$$

$$(A\cdot B)\times \mathrm{Supp}C = (A\times \mathrm{Supp}C)\cdot(B\times \mathrm{Supp}C).$$

Как мы видим, ММ присущ своеобразный дуализм операций. Операции над ММ разбиваются на две пары двойственных операций по отношению к операции дополнения: объединение и пересечение, арифметическое сложение и арифметическое вычитание. При этом объединение и пересечение ММ связаны двумя двойственными соотношениями (18), а сложение и вычитание ММ – тремя такими соотношениями (19). Вместе с тем существует и двойственность иного рода, представленная соотношениями (12) и (13). Операции объединения и арифметического сложения, пересечения и арифметического умножения ММ тоже образуют две пары сходных операций по отношению к операции Supp, задающей предельный переход от ММ к множествам.

Как и в случае множеств, не все операции над ММ взаимно коммутативны, ассоциативны и дистрибутивны. Так, разность и прямое произведение ММ не обладают свойствами коммутативности. Для симметрической разности трех и более ММ, арифметических сложения и умножения произвольного (больше трех) числа ММ не выполняется свойство ассоциативности. Объединение, пересечение, сумма, разность, симметрическая разность, арифметическое и прямое произведения не всегда дистрибутивны относительно друг друга. Некоторые свойства отдельных операций над множествами и ММ также не всегда совпадают. Так, например, симметрическая разность ММ в отличие от множеств не ассоциативна. Разность и симметрическая разность множеств дистрибутивны относительно пересечения и не дистрибутивны относительно объединения. В то же время разность и симметрическая разность ММ не дистрибутивны относительно и объединения, и пересечения.

3. Связи между операциями над мультимножествами

Приведем ряд важных соотношений, связывающих между собой различные операции над ММ, которые вытекают из их определений:

$$A\subseteq B \Rightarrow A=A\cap B,\ B=A\cup B; \tag{20}$$

$$A\cap B\subseteq A;\quad A\cap B\subseteq B;\quad A\cap B\subseteq A\cup B;\quad A\subseteq A\cup B;\quad B\subseteq A\cup B; \tag{21}$$

$$A-B\subseteq A;\quad B-A\subseteq B;\quad A-B\subseteq A\Delta B;\quad B-A\subseteq A\Delta B;\quad A\Delta B\subseteq A\cup B; \tag{22}$$

$$A\subseteq k\cdot A;\quad A\subseteq A^n;\quad A\cap B\subseteq A\cdot B;\quad A\cup B\subseteq A+B. \tag{23}$$

$$A = (A-B)+(A\cap B);\ B = (B-A)+(A\cap B); \tag{24}$$

$$A\cup B = (A+B)-(A\cap B) = (A\cap B)+(A\Delta B) = A+(B-A) = B+(A-B); \tag{25}$$

$$A\cap B = (A+B)-(A\cup B) = (A\cup B)-(A\Delta B) = A-(A-B) = B-(B-A); \tag{26}$$

$$A-B = (A\cup B)-B = A-(A\cap B) = (A\cup B)\Delta B = A\Delta(A\cap B); \tag{27}$$

$$A\Delta B=(A\cup B)-(A\cap B) = (A-B)\cup(B-A) = (A-B)+(B-A) = (A+B)-2\cdot(A\cap B); \tag{28}$$

$$A+B = (A\cup B)+(A\cap B) = (A\Delta B)+2\cdot(A\cap B). \tag{29}$$

Некоторые из приведенных выше выражений (20)–(29) были получены ранее в [5] и внешне напоминают аналогичные включения и равенства, связывающие множества и их мощности. Но между множествами и ММ есть принципиальное отличие: различные комбинации операций над ММ получаются, главным образом, путем сложения и вычитания результатов других операций, в то время как аналогичные им комбинации операций над множествами – путем объединения и пересечения результатов других операций. Поэтому при переходе от множеств к ММ не все из соотношений (20)–(29) перейдут в соответствующие выражения для множеств. В частности, для множеств отсутствуют аналоги включений (23), равенств (24), (25), (29), двух последних равенств в формуле (28).

Правила вычисления мощностей и размерностей результатов операций над ММ которые получаются из соответствующих соотношений (24)–(29), связывающих операции над ММ, имеют следующий вид.

$$|A|=|A-B|+|A\cap B|;|B|=|B-A|+|A\cap B|; \tag{30}$$

$$|A\cup B|=|A+B|-|A\cap B|=|A\Delta B|+|A\cap B|=|A|+|B-A|=|B|+|A-B|; \tag{31}$$

$$|A\cap B|=|A+B|-|A\cup B|=|A\cup B|-|A\Delta B|=|A|-|A-B|=|B|-|B-A|; \tag{32}$$

$$|A-B|=|A|-|A\cap B|=|A\cup B|-|B|; \tag{33}$$

$$|A\Delta B|=|A\cup B|-|A\cap B|=|A+B|-2\cdot|A\cap B|=|A-B|+|B-A|; \tag{34}$$

$$|A+B|=|A\cup B|+|A\cap B|=|A\Delta B|+2\cdot|A\cap B|=|A|+|B|;(35)$$

$$|A|-|B|=|A-B|-|B-A|; \tag{36}$$

$$|k\cdot A|=k\cdot|A|.;\ |A\cdot B| = \sum_{x\in S}(n_A(x)\cdot n_B(x));\ |A^n|= \sum_{x\in S}\left(n_A(x)\right)^n; \tag{37}$$

$$|A\times B|=|A|\cdot|B| =\left(\sum_{x\in S}n_A(x)\right)\cdot\left(\sum_{x\in S}n_B(x)\right);\ |(\times A)^n| = |A|^n; \tag{38}$$

$$/A/=/(A-B)\cup(A\cap B)/;\ /B/=/(B-A)\cup(A\cap B)/; \quad (39)$$
$$/A\cup B/=/A+B/;\ /A\cap B/=/A\cdot B/;\ /A\Delta B/=/A-B/+/B-A/; \quad (40)$$
$$/A/+/B/=/A\cup B/+/A\cap B/=/A+B/+/A\cdot B/; \quad (41)$$
$$/k\cdot A/=/A^n/=/A/;\ /A\times B/=/A/\cdot/B/;\ /(\times A)^n/ = /A/^n\,. \quad (42)$$

При переходе от ММ к множествам выражения (30)–(36), (38) для мощностей ММ перейдут в аналогичные соотношения для мощностей множеств. Аналогами первого равенства в формуле (41) и второго равенства в формуле (42) будут соответственно основное равенство $|A|+|B|=|A\cup B|+|A\cap B|$ для мощностей множеств и правило $|A\times B|=|A|\cdot|B|$ вычисления мощности прямого произведения множеств. Однако выполняются не все аналогичные соотношения. Так, например, в отличие от множеств, для размерности разности и симметрической разности ММ имеем

$$/A/-/B/ \neq /A-B/-/B-A/;\ /A\Delta B/ \geq /A\cup B/-/A\cap B/. \quad (43)$$

Заключение

Итак, ММ – это действительно гораздо более многогранное понятие, чем понятие множества. Функция числа экземпляров ММ $n_A(x)$, определяющая отображение $n_A{:}S\to Z^+=\{0,1,2,\ldots\}$, является расширением характеристической функции множества $\chi_A(x)$, задающей отображение χ_A: $S\to\{0,1\}$. Поэтому о ММ уже нельзя говорить просто как о n-элементном множестве. Нужно указать, сколько в ММ имеется различных компонент, то есть групп одинаковых элементов, и сколько имеется экземпляров каждого вида элементов внутри каждой из групп. Возможность присутствия в ММ произвольного, в том числе и неограниченного, числа компонент и произвольного количества экземпляров любого из элементов принципиально отличает ММ от множества. Именно эта особенность порождает целый ряд свойств ММ как качественно нового математического объекта.

Литература

1. Журавлев Ю.И. Корректные алгебры над множествами некорректных (эвристических) алгоритмов. I, II, III. // Кибернетика. – 1977. – № 4. – С. 14-21; 1977. – № 6. – С. 21-27; 1978. – № 2. – С. 35-43.
2. Кнут Д.Э. Искусство программирования. – М.: Мир, 1977. – Том. 2: Получисленные алгоритмы.
3. Орловский С.А. Проблемы принятия решений при нечеткой исходной информации. – М.: Наука, 1981.
4. Петровский А.Б. Метрические пространства мультимножеств // Доклады Академии наук. – 1995. – Т. 344, № 2. – С. 175-177.
5. Петровский А.Б. Комбинаторика мультимножеств // Доклады Академии наук. – 2000. – Т. 370, № 6. – С. 750-753.
6. Yager R.R. On the theory of bags // International Journal of General Systems. – 1986. – Vol. 13. – С. 23-37.

The paper considers a multiset approach to a presentation of objects, which are described with many quantitative and qualitative attributes and can exist in several copies, for instance, multicriteria alternatives evaluated by several experts, recognized graphic symbols, textual documents, and so on. The based characteristics of multiset are defined. The ways for a multiset comparison are suggested. The main operations under multisets are introduced, and its properties are investigated. The relations between operations under multisets, and rules for a calculation of operations cardinalities and dimensionalities are discovered.

Материал поступил в редакцию 12.04.02.