

УДК 619.1

В.І. Петренюк

Кіровоградський національний технічний університет, Україна, pz@kdtu.kr.ua

Узагальнена оцінка роду простого графа

Методом φ -перетворень розв'язуємо задачу про верхню оцінку топологічного роду простого графа, поданого як φ -образ зірки та неплосинного графа за наявними характеристиками множини точок ототожнення.

Вступ

Задача визначення топологічного роду простого графа є NP-повною згідно з відомою роботою Thomassena, тому цікаво отримати верхню оцінку роду простого графа. В роботі [1] отримано наступний результат для площинних графів: якщо $t=3$, то $\gamma(\mathfrak{Z}) \leq \gamma(G) + t - \theta - 1$, де $\gamma(G)=0$, $\theta = \theta_G(X)$, $\theta \in \{0,1\}$, θ – описує деяку властивість множини точок X графа G .

Нашою метою є узагальнення цього результату для площинних неорієнтованих графів G без кратних ребер та дуг, що містять множину точок X із числом досяжності t , $t > 3$, та узагальнену θ -характеристику множини X . Основні поняття та позначення взяті з [1],[2]

1. Визначимо операцію типу 1. Для цього введемо допоміжні позначення і поняття. Нехай задане вкладення $f: G \rightarrow \sigma$ графа G в σ , яке реалізує t , $t_G(X) = t$, де $S_G(X) = \{s_i\}_1^t$. Розглянемо підмножину $\{s_i\}_1^3$ множини $S_G(X)$, яка задовольняє співвідношенню $a \in G^0 \cap \left(\prod_{i=1}^3 \partial s_i \right)$.

Позначення 1. Позначимо через G_{12} найменший підграф графа G , що допускає наступне φ -перетворення $\varphi_1, \varphi_1(G', a' + a'') = (G, a)$, при якому виконуються умови: 1) $\rho_{G'}(a') = \rho_{G_{12}}(a)$; 2) $\rho_{G'}(a'') = \rho_G(a) - \rho_{G_{12}}(a)$, де $a', a'' \in (G')^0$. Операцію φ_1^{-1} будемо називати розщепленням вершини a . Перенумеруємо елементи множини $S_G(X)$ так, щоб $S_G(X) = \left\{ \left\{ s_{ij} \right\}_{j=0}^{t_i} \right\}_{i=0}^{\tau}$ і виконувалося відношення $(\forall_{j,j'})(j, j' = 1(1)t_i)(i = 1(1)\tau) \left(\{t_i\}_1^{\tau} \subset N \right) (\alpha S_{ij} \cap \alpha S_{i'j'} \cap \alpha S_{i0} \neq \emptyset)$. Відповідно до цього для $s_{ij}, s_{i'j'}, s_{i0}, i = 1(1)\tau$ визначений підграф $G_{ij,i'j'}$, також як підграф G_{12} . Позначимо через T_i множину усіх пар $(S_{ij}, S_{i'j'})$, які не містять спільних елементів,

і таких, що $T_i \cap T_{i'} = \emptyset, i \neq i', i, i' = 1(1)\tau$. Через T_i' будемо позначати множину усіх клітин які складають елементи множини $T_i, i = 1(1)\tau$.

Визначення 3. Будемо говорити, що відносно заданої множини $S_G(X)$ і вкладення f клітина S_{ij} має вагу $\theta_1(S_{ij})$, якщо

$$\theta_1(S_{ij}) = \begin{cases} t_i, j = 0 \\ 0, j \neq 0 \end{cases} \quad \text{де } j = 1 \dots t_i; t_i = |T_i|, i = 1(1)\tau.$$

Визначення 4. Будемо говорити, що множина $S_G(X)$ має вагу $\theta_1(X, f)$ щодо заданого вкладення f , якщо $\theta_1(X, f) = \max_{i=1}^{\tau} \theta_1(S_{i0})$, де максимум береться по всіх неізоморфних множинах $S_G(X)$.

Визначення 5. Вагою множини X будемо називати число $\theta_1(X)$, $\theta_1(X) = \max \theta_1(X, f)$, де максимум береться по всіх ізоморфних вкладеннях f графа G в σ , яка реалізує t .

Визначення 6. Будемо говорити, що вкладення $f': G \rightarrow \sigma$ є 1-оптимальним, якщо воно реалізує $t_G(X)$, має місце рівність $\theta_1(X) = \theta_1(X, f')$.

Узагальнення $\theta_1(X)$ здійснюємо шляхом зведення обох випадків в один випадок: наявної спільної вершини у 2-клітин $\Delta_1, \Delta_2, \Delta_3$ із $S_G(X)$, чи наявного простого циклу, утвореного трійкою $\Delta_1, \Delta_2, \Delta_3$. Для цього розглянемо три різні $\Delta_1, \Delta_2, \Delta_3$ із $S_G(X)$, так, що $\partial\Delta_1 \cap \partial\Delta_2 \neq \emptyset$. Виділимо найменший по включенню підграф H , $H(\Delta_2, \Delta_3)$ та візьмемо ланцюги $L_{13} = L_G(a_1, b_1)$, $L_{13} \subseteq H(\Delta_1, \Delta_3) \cap H$, $L_{23} = L_G(a_2, b_2)$, $L_{23} \subseteq H(\Delta_2, \Delta_3) \cap H$, де $H = H(\Delta_1, \Delta_2, \Delta_3)$ – найменший по включенню підграф графа G , утворений частково границями клітин $\partial\Delta_i, i = 1, 2, 3$.

Основна частина

Пропозиція 0. Нехай задано мінімальне вкладення $f, f: G \rightarrow \sigma_v$, графа G в поверхню σ_v , при якому реалізується $t_G(X)$ та $\theta_G(X)$, де $t_G(X) = t$, $\theta_G(X) = \theta$.

Якщо мають місце наведені вище позначення та виконуються наступні умови:

0) ланцюг $L_{13}(a_1, b_1)$ ізоморфний ланцюгу $L_{13}(b_1, a_1)$, ланцюг $L_{23}(a_1, b_1)$ ізоморфний ланцюгу $L_{23}(b_1, a_1)$;

1) ланцюги L_{13}, L_{23} центрально симетричні відносно автоморфізму графа;

2) $(f(X) \cap H(\Delta_1, \Delta_3) = \emptyset) \& (f(X) \cap H(\Delta_2, \Delta_3) = \emptyset)$;

то існує таке 2-клітинне вкладення $f': G \rightarrow \sigma_{v+1}$, при якому $f'(X) = f(X)$, $f'(X) \subset \partial\Delta$, де

$$\partial\Delta \in \sigma_{v+1} \setminus f'(G), \quad \partial\Delta = \bigcup_{i=1}^3 \partial\Delta_i \setminus (f(H(\Delta_1, \Delta_3)) \cup f(H(\Delta_2, \Delta_3))).$$

Доведення пропозиції 0 аналогічне доведенню лем 1, 2 [2]. Відмітимо, що у випадку підграфа H , у виродженого в точку, маємо властивість 1, а у випадку підграфів $H(\Delta_1, \Delta_3)$ і $H(\Delta_2, \Delta_3)$, вироджених у точку, маємо властивість 2.

Позначення 2. Будемо говорити, що ручка h приклеїна до 2-клітин $\Delta', \Delta'' \in \sigma(G, f)$, і позначати її через $h(\Delta', \Delta'')$, якщо задано φ -перетворення φ' у

такий спосіб: $\varphi'((\Delta' \dot{\cup} \Delta'') \setminus (\tau' + \tau''), \partial\tau' + \partial\tau'') = (h, \tau^*)$, де τ', τ'' – регулярні 2- клітини, такі, що $\tau' \subset \Delta', \tau'' \subset \Delta'', \partial\tau' \cap \partial\Delta' = \partial\tau'' \cap \partial\Delta'' = \emptyset$.

Лема 01. Нехай X – скінченна множина точок зв'язного неплосинного графа G ; задане вкладення $f: G \rightarrow \sigma$, $\gamma(\sigma) = n$, яке реалізує $t_G(X)$ і що є 1-оптимальним, причому $(\Delta_{ij}, \Delta_{ij'}) \in T_i$, $X_p = f(X \cap \partial\Delta_p)$, де $p \in \{ij, ij', i0\}$, $j < j'$, $j, j' = 1(1)t_i$, $i = 1(1)\tau$, $\{t_i\}_1^\tau \subset \mathbb{N}$.

Існує 2-клітинне вкладення $f_1: G \rightarrow \sigma'$, де $\gamma(\sigma') = n + \theta_1$, що задовольняє наступним умовам:

$$1) f_1 \left(\left(\bigcup_{j < j'}^{t_i} X_{ij} \right) \dot{\cup} X_{i0} \subset \partial\Delta_i \right), \Delta_i \in \sigma'(G, f_1), j, j' = 1, i = 1(1)\tau;$$

$$2) f_1 \left| \left(X - \bigcup_{\forall i=1}^{\tau} \left(\bigcup_{\forall p} Y X_p \right) \right) \right. = f \left| \left(X \setminus \bigcup_{i=1}^{\tau} \left(\bigcup_{\forall p} Y X_p \right) \right) \right.$$

Доведення. Нехай X – скінченна множина точок зв'язного графа G ; задане вкладення $f: G \rightarrow \sigma$, що є 1-оптимальним, причому $(\Delta_{ij}, \Delta_{ij'}) \in T_i$, $f(X_p) = f(X) \cap \partial\Delta_p$, де $p \in \{ij, ij', i0\}$, $j < j'$, $j, j' = 1(1)t_i$, $i = 1(1)\tau$, $\{t_i\}_1^\tau \subset \mathbb{N}$.

Для зручності позначимо клітини $\Delta_{i0}, \Delta_{ij}, \Delta_{ij'}$ через $\Delta_1, \Delta_2, \Delta_3$ відповідно. Нехай $a \in G^0 \cap \left(\bigcap_{i=1}^3 \partial\Delta_i \right)$. Виконаємо розщеплення вершини за допомогою φ -перетворення φ_1^{-1} , де φ -перетворення φ_1 графа G' в G задане в такий спосіб: $\varphi_1(G', a', a'') = (G, a)$. Одержимо вкладення $f\varphi_1: G' \rightarrow \sigma_{n+1}$ графа G' в σ_{n+1} , при якому виконується рівність $\sigma(G', f\varphi_1) = (G_0(G, f) \setminus \{\Delta_i\}_1^2) \dot{\cup} \{\Delta_{12}\}$, де $\partial\Delta_{12} = \left(\bigcup_{i=1}^2 \partial\Delta_i \setminus \{a\} \right) \dot{\cup} \{a', a''\}$.

Побудуємо тепер ручку $h = h(\Delta_3, \Delta_{12})$ шляхом φ -перетворення φ' . Задамо вкладення $f_0: G' \rightarrow \sigma_{n+1}$ так, щоб виконувалися наступні умови:

- 1) $f_0(St_{G'}^1(a')) \in h$;
- 2) $f_0|(G' \setminus (a')) = f|(G \setminus (a))$.

Тепер побудуємо вкладення $f_{jj'}^i = \varphi_1 f_0 \varphi' \varphi_1^{-1} f: G \rightarrow \sigma_{n+1}$. Неважко побачити, що маємо $\Delta = \Delta_{jj'}^{(i)}$, $\Delta \in \sigma_1(G, f_{jj'}^i)$, $\Delta^i \in h \setminus f_{jj'}^i(G_{12})$, що задовольняє рівності $\partial\Delta = \bigcup_{i=1}^i \partial\Delta_i$, причому вкладення $f_{12}: G \rightarrow \sigma_{n+1}$ є 2-клітинним, і задовольняє умовам 1), 2) цієї леми. Таким чином, для деякої пари $(\Delta_{ij}, \Delta_{ij'}) \in T_i$ ми побудуємо потрібне вкладення $f_{jj'}^i$. Наведені вище твердження справедливі також у тому випадку, коли замість клітини Δ_{i0} розглядається довільна клітина Δ , $\Delta \in \sigma'(G, f_{jj'}^i)$, де $\gamma(\sigma') \geq 1$.

Тому для всіх інших елементів множини T_i можливо виконати аналогічні міркування і побудувати відповідні вкладення $f_{jj'}^i$. Продовжуючи ці побудови для кожного $i = 1(1)\tau$ одержимо вкладення $f_1: G \rightarrow G_{n+\theta_1}$, що володіє наступними властивостями:

- 1) $f_1 \left| \prod_{\forall p} Y X_p = f_{jj'}^{(i)} \left| \prod_{\forall p} Y X_p \right. ;$
- 2) $f_1 \left(\left(\prod_{\substack{j < j' \\ jj'=1}}^{t_i} Y X_{ij} \right) Y X_{i0} \right) \subset \partial \Delta_i$, де $\Delta_i \in \sigma_{G_0}(G, f_1)$, $i = 1(1)\tau$.
- 3) $f_1 \left| X \setminus \prod_{i=1}^{\tau} \left(\prod_{\forall p} Y X_p \right) = f \left| X \setminus \prod_{i=1}^{\tau} \left(\prod_{\forall p} Y X_p \right) \right. ;$

Доведення лемі 01 закінчено. Незавжно тепер узагальнити лему 01 для незв'язного графа G .

Наслідок 01. Нехай $G = \sum_{l=1}^k G_l$, $p_0(G_l) = 1$, $l = 1(1)k$, X – скінченна множина точок графа G , задане вкладення $f: G \rightarrow \sigma$, що є 1-оптимальним, $X = \sum_{l=1}^k \sum_{\forall p} X_{lp}$, $X_{lp} = f(X \cap G_e) \cap \partial \Delta_p$, $p \in \{i0, ij, ij'\}$, $j < j'$, $j, j' = 1(1)t_i$, $i = 1(1)\tau$, $\{t_i\}_1^{\tau} \subset \mathbb{N}$.

Існує вкладення $f_1: G' \rightarrow \sigma'$, $\gamma(\sigma') = \theta_1$, що задовольняє наступним умовам:

- 1) $f_1 \left| X_{li} \subset \partial \Delta_{li}$, де $X_{li}' = X_{li0} \prod_{\substack{jj'=1 \\ j < j'}}^{t_i} Y X_{lij}$, $\Delta_{li} \in \sigma'(G, f_1)$,

$l = 1(1)k$.

- 2) $f_1 \left(\left(\prod_{l=1}^k \left(\prod_{i=1}^{\tau} \left(\prod_{\substack{j < j' \\ jj'=1}}^{t_i} X_{lij}' Y X_{li0} \right) \right) \right) \right) = f \left(\prod_{l=1}^k \prod_{i=1}^{\tau} Y X_{li} \right)$.

Наслідок 02. Має місце рівність $\theta_1 = \sum_{i=1}^{\tau} t_i$.

Визначення 7. Операцією типу 1 або 1-операцією на множині $\{\Delta_{i0}, \Delta_{ij}, \Delta_{ij'}\}$ назвемо побудову вкладення $f_{jj'}^i$, приведену при доведенні лемі 01.

Результатом операції типу 1 на множині $S_G(X)$ будемо називати вкладення f_1 , описане в лемі 01 або в наслідку 01, і множина клітин $S_1 = \left\{ \Delta_i' \right\}_1^{t_i}$, $S_1 \subset \sigma'(G, f_1)$, така, що

$$\text{або } S_1 = \left(S_G(X) \setminus \left(T_i \prod_{i=1}^{\tau} \{\Delta_{i0}\} \right) \right) \prod_{i=1}^{\tau} \{\Delta_i'\}_1^{t_i};$$

або $S_1 = (S_G(X) \setminus (T_i \cup \{\Delta_{i_0}\})) \cup_{l=1}^k \{\Delta_{l_i}\}_{i=1}^t$, де $l = p_0(G)$.

Наслідок 03.

1) Кожному неізоморфному вкладенню, що $f: G \rightarrow \sigma$ реалізується 1-оптимальним, однозначно відповідає неізоморфне вкладення $f_1: G \rightarrow \sigma_{n+\theta_1}$.

2) Кожній множині $S_G(X)$ однозначно відповідає множина S_1 .

3) Якщо $p_0(G) = 1$, то f_1 – 2-клітинне вкладення.

4) Якщо $p_0(G) > 1$, то має місце співвідношення

$$(\exists \Delta)(\forall \Delta')(\Delta \in \sigma_{n+\theta_1}(G, f_1))(\Delta' \in \sigma_{n+\theta_1}(G, f_1) \setminus \{\Delta\})[(p_1(\bar{\Delta}) = p_0(G)) \wedge (p_1(\bar{\Delta}') = 0)].$$

Покладемо, що виконано всі операції типу 1 на $S_G(X)$ й отримане $S = S_1 = \{\Delta_i\}_1^t$.

Позначення 3. Будемо говорити, що на S як на множині вершин графа \hat{S} визначене відношення суміжності $(\Delta_i, \Delta_j) \in \hat{S}^1 \Leftrightarrow \partial\Delta_i \cap \partial\Delta_j \neq \emptyset$. Одержимо граф \hat{S} . Позначимо через Z , $Z = Z(\hat{S})$, множину усіх незалежних циклів графа \hat{S} , $Z = \{z_i\}_{i=1}^{p(\hat{S})}$. Назвемо цикл $z, z \in Z$ клітинним; $p_1(\hat{S})$ – цикломатичним числом графа \hat{S} через p .

Позначення 4. Позначимо через $\{C_{ij}\}_{j=1}^{k_i}$ найменшу по включенню множину таких простих ланцюгів графа G , для якої мають місце наступні властивості:

$$a) j = 2(1)(k_i - 1), C_{ij} = C_G(a_{ij}, a_{ij+1}),$$

де $a_{ij} \in \partial\Delta_{ij-1} \cap \partial\Delta_{ij} \cap G^0, a_{ij+1} \in G^0 \cap \partial\Delta_{ij} \cap \partial\Delta_{ij+1}$,

$$j = 2(1)(k - 1) \quad j = 1, C_{ij} = C_G(a_{i1}, a_{i2}); \quad j = k_i, C_{ik} = C_G(a_{ik}, a_{i1}),$$

де $a_{i1} \in \partial\Delta_{i1} \cap \partial\Delta_{i2} \cap G^0$,

причому $f''(C_{ij}) \subset \partial\Delta_{ij}, j = 1(1)k_1, i = 1(1)p$.

б) Ланцюги $C_{ij}, C_{ij'}, j \neq j', j, j' = 1(1)k_i$, перетинаються один з одним тільки в кінцевих вершинах.

в) Об'єднання всіх ланцюгів C_{ij} є простим циклом \bar{z}_i графа G , який володіє тією властивістю, що всі клітини циклу z_i розташовуються зовні відносно $f_1(\bar{z}_i)$.

Визначення 8.

Позначимо через G_i найбільший зв'язний підграф графа G , такий, що $f(G_i)$ має зовнішню грань Δ , де $\partial\Delta = \bar{z}_i, i = 1(1)p$. Через те що $\{a_{ij}\}_{j=1}^{k_i} \subset \bar{z}_i^0, n = k_i$, будемо називати підграф G_i « n -кутником» на вершинах $a_{ij} \in \{a_{ij}\}_1^{k_i}$, породженим незалежним циклом $z_i \in Z$, а цикл \bar{z} назвемо границею графа $f(G_i)$.

Позначення 5. Перенумеруємо елементи множини Z так, щоб мала місце рівність $Z = \sum_{j=1}^m Z_j$, де підмножина Z_j множини Z , $Z_j = \{z_{jk}\}_{k=1}^{m_j}$, складається з усіх простих циклів z_{jk} , які задовольняють наступному співвідношенню:

$$(\exists i, j)(\forall k)(i = 2(1)p_1(\hat{S}), k = 1(1)m_j, j = 1(1)m) \left[\left(z_{jk} \in Z \setminus \bigcup_{j=1}^{i-1} Z_j \right) \wedge \left(z_i^0 \mathbf{I} \left(\mathbf{I} z_{jk}^0 \right)_{k=1}^{m_j} \right) = 0 \right]$$

При $i = 1$ вважаємо, що $\bigcup_{j=1}^{i-1} Z_j = 0$. Тепер перенумеруємо вершини циклу z_i так,

щоб для деякої вершини $\Delta_{ij'}$, де $\Delta_{ij'} \in z_i^0 \mathbf{I} \left(\mathbf{I} z_{jk}^0 \right)_{k=1}^{m_j}$ привласнити номер $j11$, а для інших вершин цього циклу номера $j1l$, де $l = 1(1)m_{j1}$. Для z_{jk} , $k = 2(1)m_j$, виконаємо перенумерацію вершин так, щоб $z_{jk}^0 = \left\{ \Delta_{jkl} \right\}_{l=1}^{m_k}$. Відповідно до цього

$$S = \left\{ \left\{ \left\{ \Delta_{jkl} \right\}_{l=1}^{m_k} \right\}_{k=1}^{m_j} \right\}_{j=1}^m.$$

Визначення 9. Будемо говорити, що число $\theta_2(\Delta) \in 2$ -вагою довільної клітини $\Delta, \Delta \in S$, щодо заданої множини S і вкладення $f_1'' : G \rightarrow \sigma'$, якщо виконується умова

$$\theta_2(\Delta) = \begin{cases} 0, \Delta \neq \Delta_{j11} \\ \sum_{k=1}^{m_j} \left\{ \frac{\alpha_0(z_{jk}^0)}{2} - 1 \right\}, \Delta = \Delta_{j11}, \text{ де } \{A\} \text{ найбільше ціле } \geq A. \end{cases}$$

Визначення 10. Будемо говорити, що множина S має 2-вагу $\theta_2(S)$ або $\theta_2(S) = \theta_2(S, f_1'')$ щодо заданого вкладення $f_1'' : G \rightarrow \sigma'$, якщо виконується умова $\theta_2(S, f_1'') = \max_{\forall \Delta \in S} \theta_2(\Delta)$, де \max береться по всіх різних множинах S при заданому вкладенні f_1'' .

Визначення 11. Число θ_2 будемо називати 2-вагою множини S , якщо має місце умова $\theta_2 = \max \theta_2(S, f_1'')$, де \max береться по всіх неізоморфних вкладеннях $f_1'' : G \rightarrow \sigma'$ графа G в σ' .

Визначення 12. Вкладення $f_2' : G' \rightarrow \sigma'$ (див. позначення 3) називається 2-оптимальним, якщо $\theta_2 = \theta_2(S, f_2')$.

Лема 02. Нехай X – скінченна множина точок зв'язного графа G , вкладення $f_1 : G \rightarrow \sigma_n$, що є 2-оптимальним, і множина $S = S_1 = \{\Delta_i\}_1'$ –

результат усіх 1-операцій на множині $S_G(X)$, $z_i = \{\Delta_{ij}\}_1^{k_i}$, z_i – незалежний цикл графа \hat{S} , $X' = f_1(X)$, $X'_i = f_1(X') \cap \left(\bigcup_{j=1}^{k_i} \partial\Delta_{ij} \right)$.

Існує 2-клітинне вкладення $f_2 : G \rightarrow \sigma''$, де $\gamma(\sigma'') = \gamma(\sigma') + \theta_2$, що задовольняє наступним умовам:

$$1) f_2(X'_i) \subset \bigcup_{\forall k} \partial\Delta_{ik}'' , i = 1(1)p, k \in \{1,2\}, \text{ де } \left\{ \Delta_{ik}'' \right\}_i^2 \subset \sigma''(G, f_2),$$

причому або $\bigcup_{k=1}^2 \partial\Delta_{ik}'' = f_2\left(\bigcup_{j=1}^{k_i} \partial\Delta_{ij}\right)$, або $\partial\Delta_{i1}'' = f_2\left(\bigcup_{l=1}^{k_i} \partial\Delta_{ij}\right)$;

$$2) f_2\left(X' \setminus \bigcup_{i=1}^p X'_i\right) = f_1\left(X' \setminus \bigcup_{i=1}^p X_i\right).$$

Доведення. Нехай $f_1 : G \rightarrow \sigma_n$ – 2-оптимальне вкладення графа G в σ_n . Виконаємо всі можливі 1-операції на множині $S_G(X)$, одержимо вкладення $f_1 : G \rightarrow \sigma''$ і множину $S = S_1 = f_1(S_G(X)) = \left\{ \left\{ \Delta_{ij} \right\}_{j=1}^{k_i} \right\}_{i=1}^{t'}$, де $t' < t, \gamma(\sigma') = \theta_1$.

Розглянемо граф \hat{S} і $z_i \in Z(\hat{S}), z_i = \{\Delta_{ij}\}_1^{k_i}, i = 1(1)p(\hat{S})$. Позначимо через X' множину $f_1(X)$, а через X'_i множину $f_1(X') \cap \left(\bigcup_{j=1}^{k_i} \partial\Delta_{ij} \right)$. З кожним циклом z_i зв'язаний підграф G_i графа G , названий у силу визначення θ -кутником на множині вершин $\{a_{ij}\}_{i=1}^{k_1}$, причому границею графа $f_1(G_i)$ є цикл \bar{z}_i довжини n , де $n = k_i$. Виконаємо наступні операції:

1. За допомогою зворотного φ -перетворення φ_i^{-1} розщепимо вершини a'_{ij} на a'_{ij}, a''_{ij} , де φ -перетворення визначається в такий спосіб: $\varphi_i : \left(G', \sum_{j=3}^n a'_{ij} + a''_{ij} \right) = \left(G, \sum_{j=3}^n a_{ij} \right)$, і задано так, що виконуються наступні умови:

$$a) \rho_{G'}(a'_{ij}) = \rho_G(a_{ij}) \setminus \rho_{G_i}(a_{ij}), б) \rho_{G'}(a''_{ij}) = \rho_{G_i}(a_{ij}), \text{ де } j = 3(1)n, i = 1(1)p(\hat{S}).$$

Позначимо через C_1 простий ланцюг $\varphi_i(C_G(a_{i1}, a_{i2}))$.

2. Розглянемо відображення $\alpha_i : \varphi_i(G) \rightarrow \varphi(G)$, що має властивості:

а) $\alpha_i|_{\varphi_i(G_i)}$ – несиметричне відображення підграфа G_i щодо ланцюга C_1 , таке, що $\alpha_i(G_i) \subset \bar{\Delta}_{i1} \setminus (\partial\Delta_{i1} \setminus C_1)$.

б) на інших ребрах графа $\varphi_i(G_i)$ α_i є тотожним відображенням графа $\varphi_i(G)$.

Вкладення $f_1 = \sum_{i=1}^p (\alpha_i \varphi_i^{-1}) f_1 : G \rightarrow \sigma'$ має властивість

$$(\exists \Delta', \Delta'') (\Delta', \Delta'' \in \sigma'(G', f')) \left[\left(\partial \Delta' = f' \left(\prod_{j=2}^n \Delta_{ij} \right) \wedge (\partial \Delta'' = (\partial \Delta_{i1} \cup \bar{z}_i) \setminus C_1) \right) \right],$$

де \bar{z}_i – границя зовнішньої грані графа $f'(G_i)$. Неважко бачити, що вкладення f' – 2-клітинне.

3. За допомогою φ -перетворення «приклеїмо» до 2-клітин Δ', Δ'' множини ручок $\{h_l\}_{l=1}^m$, де $m = \left\lfloor \frac{n-2}{2} \right\rfloor$, $l = 1(1)m$. Для побудови ручки h_l , $h_l = h(\Delta', \Delta'')$ виконаємо φ -перетворення $\varphi_0 \left((\Delta' \cup \Delta'') \setminus (\tau'_l \cup \tau''_l), \partial \tau'_l \cup \partial \tau''_l \right) = (h_l, \tau_l)$, де τ'_l, τ''_l – регулярні 2-клітини, такі, що $\tau'_l \subset \Delta', \tau''_l \subset \Delta'', \partial \tau'_l \cup \partial \Delta' = \partial \tau''_l \cup \partial \Delta'' = 0$, причому для $l \neq l', l' = 1(1)m$ має місце співвідношення $\partial \tau'_l \cup \partial \tau''_{l'} = \partial \tau'_l \cup \partial \tau''_{l'} = 0$.

4. Розглянемо $St_{G'}(a_{ij}'')$, $St_{G'}(a_{ij+1}'')$, де a_{ij}'', a_{ij+1}'' – суміжні вершини циклу \bar{z} , а також простий ланцюг $C_j = \varphi_i(C_G(a_{ij}, a_{ij+1}))$, де j пробігає всі непарні числа від 3 до n . Побудуємо вкладення $f_j^i : G' \rightarrow \sigma_{V+1}''$, де $v = \gamma(\sigma')$, так щоб виконувалися умови:

$$a) f_j^i \left(St_{G_i}^1(a_{ij}'') \cup St_{G_i}^1(a_{ij+1}'') \right) \subset h_l;$$

$$b) f_j^i \left((G')^1 \setminus \left\{ St_{G_i}^1(a_{ik}'') \right\}_{k=j}^{j+1} \right) = f' \left((G')^1 \setminus \left\{ St^1(a_{ik}'') \right\}_{k=j}^{j+1} \right), \text{ де } l = 1(1)m, m = \left\lfloor \frac{n-2}{2} \right\rfloor.$$

Помітимо, що у випадку, коли $(a_{ij}'', a_{ij+1}'') \in \bar{z}_i^1$, потрібно виконати підрозбиття цього ребра; отриманий граф будемо позначати через G' . Якщо тепер склеїти вершини $a_{ij}'', a_{ij+1}'', j = 3(1)n$ один з одним за допомогою φ -перетворення φ_i , то одержимо вкладення $\varphi_i f_i^{(i)}$ графа $f'(G')$ в σ_{V+1}'' . У результаті замість $\{\Delta_{ij}\}_{j=1}^n$ множини кліток, утворюючих цикл z_i , одержимо одну з наступних множин:

$$a) \left\{ \Delta_{ij}'' \right\}_{k=1}^2, \text{ якщо } n = 2k, \text{ причому } \prod_{k=1}^2 \partial \Delta_{ij}'', \text{ де } i = 1(1)p;$$

$$b) \left\{ \Delta_{i1}'' \right\}, \text{ якщо } n = 2k + 1, \text{ причому } \partial \Delta_{i1}'' = \prod_{j=1}^n \partial \Delta_{ij}'', \text{ де } i = 1(1)p.$$

Позначимо через f_0 таке вкладення графа $f'(G')$ в σ'' , де $\gamma(\sigma'') = \gamma(\sigma') + \theta_2$, при якому виконуються наступні умови:

$$1) f_0 \left| \left\{ St_{G'}(a_{ik}'') \right\}_{k=j}^{j+1} = f_j^{(i)} \left| \left\{ St_{G'}(a_{ik}'') \right\}_{k=j}^{j+1}, \text{ при заданому } i, j = 2k + 1,$$

$$3 \leq 2k + 1 \leq n; i = 1(1)p;$$

$$2) f_0 \left| (G')^1 \setminus \prod_{j=3}^n St_{G'}^1(a_{ij}'') = f' \left| (G')^1 \setminus \prod_{j=3}^n St_{G'}^1(a_{ij}'').$$

За допомогою φ -перетворення φ_i графа $f_0(G')$ в G склеїмо вершини

$a''_{ij}, a'_{ij}, j = 3(1)n$, а за допомогою φ -перетворення $\sum_{i=1}^p \varphi_i$ виконаємо це для усіх вершин незалежних циклів $z_i, z_i \in Z$. Побудуємо тепер вкладення $f_2 = \sum_{i=1}^p \varphi_i f_0 \varphi_0 \sum_{i=1}^p (\alpha_i \varphi_i^{-1}) f_1 : G \rightarrow \sigma''$ графа G в 2-різновид σ'' роду $\gamma(\sigma'') = \gamma(\sigma') + \theta_2$, що володіє наступними властивостями:

$$1a) f_2(X'_i) \subset \prod_{k=1}^2 \partial \Delta''_{ik}, f_2\left(\prod_{j=1}^{k_i} \partial \Delta_{ij}\right) = \prod_{k=1}^2 \partial \Delta''_{ik}, \text{ якщо } k_i = n = 2k;$$

$$1б) f_2(X'_i) \subset \partial \Delta''_{i1}, f_2\left(\prod_{j=1}^{k_i} \partial \Delta_{ij}\right) = \partial \Delta''_{i1}, \text{ якщо } k_i = n = 2k + 1, i = 1(1)p;$$

$$2) f_2\left(X' \setminus \sum_{i=1}^p X'_i\right) = f_1\left(X' \setminus \sum_{i=1}^p X'_i\right), \text{ причому } \{\Delta''_{ik}\}_{k=1}^2 \subset \sigma''(G, f_2), X' = f_1(X),$$

$$X'_i = f_1(X) \cap \left(\prod_{j=1}^{k_i} \partial \Delta_{ij}\right), i = 1(1)p.$$

Неважко бачити, що вкладення $f_2 \in 2$ -клітинним. Доведення закінчено.

Нехай $G = \sum_{k=1}^m G'_k, p_o(G'_k) = 1, k = 1(1)m, X$ – скінченна множина точок графа

G . Відповідно до прийнятих позначень вважаємо результатом виконання всіх 1-операцій на $S_G(X)$ вкладення $f_1 : G \rightarrow \sigma'$, де $\gamma(\sigma') = \gamma(\sigma) + \theta_1$ і множина $S_1 = f_1(S_G(X))$. Відповідно до позначення 1 визначимо на множині $S = S_1$ граф \hat{S} .

Маємо $\hat{S} = \sum_{k=1}^m \hat{S}_k$, де \hat{S}_k – підграф графа \hat{S} , визначений на множині

$\sigma'(G'_k, f_1|G'_k) \cap S$. Множина $Z(\hat{S})$ складається з усіх незалежних циклів z_i

графу \hat{S} , де $i = 1(1)p_1(\hat{S})$. Очевидно, що $p_1(\hat{S}) = \sum_{k=1}^m p_1(\hat{S}_k), Z(S) = \sum_{k=1}^m Z(\hat{S}_k)$.

Покладемо, що $Z(\hat{S}_k) = \{z_{ki}\}_1^{m_k}, z_{ki} = \{\Delta_{kij}\}_{j=1}^{n_i}, i = 1(1)p_1(\hat{S}_k), m_k = p_1(\hat{S}_k)$.

Позначимо через X_k^0 підмножини множини $f_1(X)$ приналежного компоненту G'_k

графу G , а через X_{ki} підмножину $X_k \cap \left(\prod_{j=1}^{n_i} \partial \Delta_{kij}\right)$ множини X_k . Безпосередньо з

леми 02 і приведених позначень випливає

наслідок 02.1: Існує таке вкладення $f : \sum_{k=1}^m G'_k \rightarrow \sigma''$ графа $G = \sum_{k=1}^m G'_k$ в σ'' ,

де $\gamma(\sigma'') = \gamma(\sigma') + \theta_2$, що $f|G'_k$ задовольняє умовам:

$$1) f\left(X_k \text{ I } \left(\prod_{i=1}^{m_k} \left(\prod_{j=1}^{n_i} \partial \Delta_{kij}\right)\right)\right) = \sum_{i=1}^{m_k} f_2(X_{ki}), \text{ де } m_k = p_1(\hat{S}_k), k = 1(1)m;$$

$$2) f(X_{ki}) \subset \partial \Delta_{ki1}'' \text{ Y } \partial \Delta_{ki2}'' \text{ при } n_i = 2k,$$

$$f(X_{ki}) \subset \partial \Delta_{ki1}'' \text{ при } n_i = 2k + 1, k \in \mathbb{N};$$

$$3) f|_{f_1(X)} \setminus \sum_{k=1}^m \sum_{i=1}^{m_i} f_2(X_{ki}) = f_1|_{f_1(X)} \setminus \sum_{k=1}^m \sum_{i=1}^{m_i} f_2(X_{ki});$$

$$(\forall \Delta') (\exists \Delta) (\Delta \in \sigma''(G, f_2)) (\Delta'' \in \sigma''(G, f_2) \setminus \{\Delta\}) [(p_1(\partial \Delta) = p_0(G)) \wedge p_1(\partial \Delta') = 0].$$

Визначення 13. Операцією типу 2 або 2-операцією на циклі $\bar{z}_i, z, z \in Z(\hat{S})$, будемо називати побудову або вкладення $f_2 \Big|_{j=1}^{k_i} \text{ Y } \partial \Delta_{ij}$, де $z_i^0 = \{\Delta_{ij}\}_{j=1}^{k_i}$, описаного при

доведенні леми 02, або вкладення $f \Big|_{j=1}^{n_i} \text{ Y } \partial \Delta_{kij}$, де $z_i = z_{ki}, z_{ki}^0 = \{\Delta_{kij}\}_{j=1}^{n_{ki}}$, описаного в наслідку 02.1

Визначення 14. Результатом усіх операцій типу 2 на множині $S_1 = f_1(S_G(X))$ будемо називати вкладення $f_2 : G' \rightarrow \sigma''$, де $\gamma(\sigma'') = \theta_1 + \theta_2$, що або збігається з вкладенням $f_2 : G' \rightarrow \sigma''$, описаним у лемі 02, або збігається з вкладенням f , описаним у наслідку 02.1, і множина $S_3 = f_2(S_1), S_3 = \{\Delta_i\}_{i=1}^{t_3}$. Покладемо, що на множині $f_2(S_1)$, де $S_1 = f_1(S_G(X))$, виконані всі операції типу 2.

1) Розглянемо множину $S_2 = f_2(S_1) = f_2 f_1(S_G(X))$, що для зручності позначимо через S . Нехай $S_2 = \{\Delta_i\}_1^{t_2}$, де $t_2 < t' < t$. Визначимо граф \hat{S}_2 відповідно до позначення 1.

2) Припустимо, що $p_1(\hat{S}_2) \neq 0$. Розглянемо множину $Z(\hat{S}_2)$, що складається з усіх незалежних циклів графа \hat{S}_2 .

Лема 00. Для множини $S_2 = f_2 f_1(S_G(X)) = \{\Delta_i\}_1^{t_2}$ виконується співвідношення:

$$\forall (i, j, k) (i \neq j, i \neq k, j \neq k, i, j, k = 1(1)t'') (\partial \Delta_i \text{ I } \partial \Delta_j \text{ I } \partial \Delta_k = 0).$$

Доведення. Нехай $S_2 = f_2 f_1(S_G(X)) = \{\Delta_i\}_1^{t_2}$, де f_1, f_2 – вкладення, задовольняє лемам 01, 02 відповідно. Припустимо, що зазначене в умові співвідношення не виконується. Це означає, що для деяких різних клітин $\Delta_i, \Delta_j, \Delta_k$ множини S_2 має місце рівність $\partial \Delta_i \text{ I } \partial \Delta_j \text{ I } \partial \Delta_k = \emptyset$. Розглянемо вкладення $f_1 = G \rightarrow \sigma'$ і множину $S_1 = f_1(S_G(X))$, які фігурують у лемі 02. Нехай $S_1 = \{\Delta_i\}_1^{t'}$, де $t' > t_2$. Кожній із клітин $\Delta_i, \Delta_j, \Delta_k$ відповідають один або кілька циклів з множини $Z(\hat{S}_1)$,

причому границя кожної з цих клітин являє собою об'єднання границь тих клітин, які утворюють цикли, що відповідають клітинам $\Delta_i, \Delta_j, \Delta_k$. Тоді знайдуться такі різні клітини $\Delta'_i, \Delta'_j, \Delta''_k \in S_1$, що задовольняють рівності $\partial\Delta'_i \cap \partial\Delta'_j \cap \partial\Delta''_k \neq \emptyset$. Це означає, що на множині S_1 можливе виконання операцій типу 1. Тим самим одержимо протиріччя позначенню 3. Припущення невірне. Отже, множина $S_2 = \{\Delta_i\}_1^{t_2}$ задовольняє зазначеному співвідношенню. Доведення закінчено.

Відповідно до прийнятих позначень і визначень неважко зробити аналогічні визначення для того, щоб дати визначення числа θ_3 , оптимального вкладення графа G в σ'' , де $\gamma(\sigma'') = \theta_1 + \theta_2$, й операції 3-типу, що, по суті справи, є операцією 2-типу на множині $S_2 = f_2 f_1(S_G(X))$.

Лема 03. Нехай X – скінченна множина точок зв'язного графа G , задано вкладення $f_2 : G \rightarrow \sigma''$, $\gamma(\sigma'') = \theta_1 + \theta_2$, що є 3-оптимальним, і множина $S_3 = \{\Delta_i\}_1^{t_3}$ являє собою результат усіх 2-операцій на множині S_1 , $S_1 = f_1(S_G(X))$, $z_i \in Z(S_3)$, $z_i^0 = \{\Delta_{ji}\}_{j=1}^{k_i}$, $X' = f_2 f_1(X)$, $X'_i = f_2(X') \cap \left(\bigcap_{j=1}^{k_i} \partial\Delta_{ij} \right)$, де $i = 1(1)p_1(\hat{S}_3)$. Існує 2-клітинне вкладення $f_3 : G \rightarrow \sigma'''$, де $\gamma(\sigma''') = \gamma(\sigma'') + \theta_3 = \theta_1 + \theta_2 + \theta_3$, яке задовольняє наступним умовам:

$$1) f_3 \Big|_{X'_i} = \bigcap_{\forall k} \partial\Delta''_{ik}, k \in \{1, 2\}, i = 1(1)p_1(\hat{S}_3);$$

$$2) f_3 \Big|_{X' \setminus \sum_{i=1}^p X'_i} = f_2 \Big|_{X' \setminus \sum_{i=1}^p X'_i}, \text{ де } p = p_1(\hat{S}_3), \{\Delta''_{ik}\}_{k=1}^2 \subset \sigma'''(G, f_3),$$

причому або $f_3 \left(\bigcap_{j=1}^{k_i} \partial\Delta_{ij} \right) = \bigcap_{k=1}^2 \partial\Delta''_{ik}$, або $f_3 \left(\bigcap_{j=1}^{k_i} \partial\Delta_{ij} \right) = \partial\Delta''_{i1}$.

У такий же спосіб можна одержати аналог наслідку 02.1.

Аналогічно можна визначити θ_k операцію k -типу, $k \geq 2$. Розглянемо множину $S_n, S_n = f_n(S_{n-1}), n \geq 2$, де вкладення $f_n : G \rightarrow \sigma^{(n)}$, $\gamma(\sigma^{(n)}) = \sum_{i=1}^n \theta_i$, побудовано у відповідній лемі 0n або наслідку 0n. Покладемо, що $p_1(\hat{S}_n) = 0$, де S_n граф побудований відповідно до позначення 1. Відповідно до лемі 00 це означає, що на множині S_n не можна виконувати операції k -типу, де $k \geq 1$.

Позначення 7. Позначимо через N_1 число клітин множини $S_G(X)$, перетворених операцією 1-типу, а через N_k – число клітин множини S_{k-1} , перетворених операцією k -типу, де $2 \leq k \leq n-1$.

Визначення 15. Упорядковану пару чисел (θ, N) будемо називати характеристикою множини X , якщо мають місце рівності $\theta_G(X) = \theta$, $\theta = \sum_{i=1}^n \theta_i$;

$N_G(X) = N$, $N = \sum_{i=1}^{n-1} N_i$. Множину X будемо називати (θ, N) -множиною точок графа G , а число θ позначати через $\theta_G(X)$.

Теорема 1.

Нехай X – скінченна (θ, N) множина точок графа G , де $t_G(X) = t$, $t > 1$, $\theta_G(X) = \theta$, $N_G(X) = N$, задане φ -перетворення

$$\varphi : \left(G + St_m(y_0), \sum_{i=1}^m a_i + y_i \right) = \left(J, \{a_i^*\}_1^m \right).$$

Має місце нерівність $\gamma(J) \leq t - N + \theta - 1$.

Доведення цієї теореми впливає з лем 01, 01, 03...

Висновки

Отриманий результат має теоретичне значення. Якщо складну інформаційну систему змоделювати у вигляді графа та вважати необхідною умовою її існування укладання на поверхні мінімального роду, то матимемо практичне застосування отриманого нами результату.

Література

1. Хоменко М.П. φ -перетворення графів: Препринт / ИМ АНУ. – Киев: 1973.
2. Хоменко М.П. Топологические аспекты теории графов: Препринт / ИМ АНУ. – Киев: 1970.
3. Хоменко М.П. Островерхий Е.Б. Существенные элементы и род графа: Препринт «Минимальные вложения графов». – ИМ АНУ. – Киев: 1972.
4. Петренюк В.И. Об оценке рода специальных графов. – Деп. рукопись в УкрНИИТИ 22.09.1986. № 2259-Ук86.
5. Петренюк В.И. О структуре плоских графов с заданным числом достижимости некоторого множества точек. – Деп. рукопись в УкрНИИТИ 22.09.1986. № 2245-Ук.86.

В.И. Петренюк

Обобщенная оценка рода простого графа

Методом φ -преобразований решаем задачу про верхнюю оценку топологического рода простого графа, данного как φ -образ звезды и неплоскостного графа по имеющимся характеристикам множества точек отождествления.

Статья поступила в редакцию 15.07.2004.