

УДК 681.3.06(075.8)

*Е.А. Семерников*

Южный научный центр РАН, г. Ростов-на-Дону, Россия  
semernikov@mvs.tsure.ru

## К вопросу устойчивости конвейерных рекурсивных фильтров

В статье анализируется влияние метода опережающих вычислений на передаточную функцию и устойчивость рекурсивного фильтра, подвергаемого конвейеризации. На основании анализа полученной передаточной функции исследуются причины, приводящие конвейеризованный фильтр к неустойчивости. Предлагается алгоритм, позволяющий получить устойчивый конвейеризованный фильтр.

### Введение

Цифровая обработка сигналов в реальном масштабе времени требует постоянного увеличения скорости вычислений, что приводит к необходимости распараллеливания вычислительного процесса. Наиболее эффективным методом распараллеливания является конвейеризация вычислений [1]. Конвейерный способ организации параллельных вычислений предполагает введение в операционные устройства дополнительных регистров. Для не рекурсивных схем введение дополнительных конвейерных регистров приводит только к увеличению задержки появления результатов. Для рекурсивных схем простое введение конвейерных регистров приводит ко многим негативным последствиям, среди которых можно выделить нарушение алгоритма функционирования и потерю устойчивости. Известные методы распараллеливания рекурсивных схем, в частности автоподстановка, замена переменных, метод опережающих вычислений [2], [3] и др., дают возможность корректно ввести дополнительные конвейерные регистры в вычислительные устройства, не нарушая алгоритма функционирования. Вопросам обеспечения устойчивости посвящен ряд исследований [4], [5], позволяющих наметить подходы к решению данной проблемы.

В предлагаемой статье исследуются причины потери устойчивости в процессе конвейеризации рекурсивных фильтров второго порядка по методу опережающих вычислений и предлагается методика создания устойчивых конвейеризованных фильтров.

### Влияние метода опережающих вычислений на передаточную функцию конвейеризованного фильтра

Для корректного введения в рекурсивную часть фильтра дополнительных конвейерных регистров можно применить методы опережающих вычислений (look-ahead computation) и ресинхронизации (retiming) [2], [3]. Метод опережающих вычислений основывается на эквивалентных преобразованиях разностного уравнения, описывающего рекурсивный фильтр, и позволяет добавить в циклы конвейерные регистры, а ресинхронизация позволяет оптимально разместить конвейерные регистры по вычислительному устройству.

Подвергнем конвейеризации рекурсивный фильтр второго порядка.

Пусть разностное уравнение и передаточная функция этого фильтра (будем называть его исходным) имеют вид

$$y_n = b_0 x_n + b_1 x_{n-1} + b_2 x_{n-2} - a_1 y_{n-1} - a_2 y_{n-2}, \quad (1)$$

$$H_H(z) = \frac{b_0 + b_1 \cdot z^{-1} + b_2 \cdot z^{-2}}{1 + a_1 \cdot z^{-1} + a_2 \cdot z^{-2}} = \frac{(1 - z_1 z^{-1})(1 - z_2 z^{-1})}{(1 - p_1 z^{-1})(1 - p_2 z^{-1})}, \quad (2)$$

где  $x_n$  и  $y_n$  – входная и выходная цифровые последовательности;

$b_i$  и  $a_i$  – вещественные коэффициенты не рекурсивной и рекурсивной частей фильтра;

$z_i$  и  $p_k$  –  $i$ -й нуль и  $k$ -й полюс передаточной функции.

Схема вычислений, соответствующая уравнению (1), представленная в виде графа потоков данных (ГПД) [2], [6], показана на рис. 1.

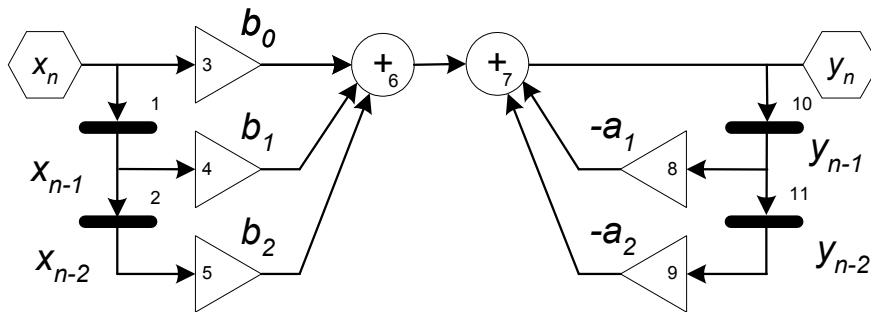


Рисунок 1 – ГПД исходного фильтра второго порядка

Представим разностное уравнение, описывающее исходный фильтр второго порядка в виде

$$y_n = v_n - a_1 y_{n-1} - a_2 y_{n-2}, \quad (3)$$

где  $v_n = b_0 x_n + b_1 x_{n-1} + b_2 x_{n-2}$  – не рекурсивная часть фильтра.

Используем метод опережающих вычислений. На основании (3) запишем

$$y_{n-1} = v_{n-1} - a_1 y_{n-2} - a_2 y_{n-3}, \quad (4)$$

$$y_{n-2} = v_{n-2} - a_1 y_{n-3} - a_2 y_{n-4}, \quad (5)$$

$$\cdot \quad \cdot \quad \cdot \quad \cdot \quad \cdot \quad \cdot \quad \cdot$$

$$y_{n-d} = v_{n-d} - a_1 y_{n-d-1} - a_2 y_{n-d-2}.$$

Подставим (4) в (3):

$$y_n = v_n - a_1 v_{n-1} + (a_1^2 - a_2) y_{n-2} + a_1 a_2 y_{n-3}. \quad (6)$$

Подставим (5) в (6):

$$y_n = v_n - a_1 v_{n-1} + (a_1^2 - a_2) v_{n-2} - (a_1^3 - 2a_1 a_2) y_{n-3} - (a_1^2 a_2 - a_2^2) y_{n-4}. \quad (7)$$

Продолжая этот процесс, можно получить разностное уравнение от любых индексов переменной  $y$ .

Обозначив коэффициенты при  $v_{n-i}$  через  $A_i$ , а при  $y_{n-d-1}$  и  $y_{n-d-2}$  через  $K1_d$  и  $K2_d$ , можно записать общий вид уравнений вида (6) и (7):

$$y_n = v_n + \sum_{i=1}^d A_i v_{n-i} + K1_d y_{n-d-1} + K2_d y_{n-d-2}. \quad (8)$$

Параметр  $d$  характеризует уровень конвейеризации фильтра и соответствует количеству дополнительных конвейерных регистров (задержек), включаемых в циклы рекурсивной части фильтра. Коэффициенты  $A_i$ ,  $K1_d$  и  $K2_d$  для любого  $d$  можно получить описанным выше способом.

Разностному уравнению (8) соответствует ГПД, показанный на рис. 2.

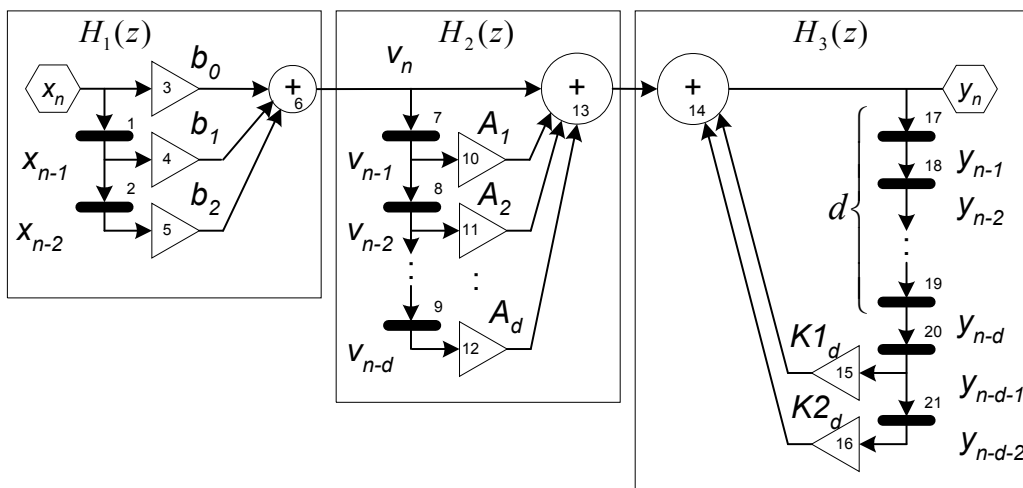


Рисунок 2 – ГПД конвейеризованного рекурсивного фильтра

Используя метод ресинхронизации, можно распределить  $d$  дополнительных конвейерных регистров 17, 18, ..., 19 по вычислительным устройствам 14, 15 и 16 так, чтобы минимизировать время вычислений в рекурсивной части фильтра [2], [3].

Очевидно, что метод опережающих вычислений изменяет структуру исходного фильтра с передаточной функцией (2). Из рис. 2 видно, что в конвейеризованном фильтре можно выделить три последовательно включенных звена:

- 1) не рекурсивный фильтр с передаточной функцией

$$H_1(z) = b_0 + b_1 \cdot z^{-1} + b_2 \cdot z^{-2} = (1 - z_1 \cdot z^{-1})(1 - z_2 \cdot z^{-1}); \quad (9)$$

- 2) не рекурсивный фильтр с передаточной функцией

$$H_2(z) = 1 + A_1 \cdot z^{-1} + \dots + A_d \cdot z^{-d} = 1 + \sum_{i=1}^d A_i \cdot z^{-i} = (1 - z_1 \cdot z^{-1}) \cdot \dots \cdot (1 - z_d \cdot z^{-1}); \quad (10)$$

- 3) рекурсивный фильтр с передаточной функцией

$$H_3(z) = \frac{1}{1 - K1_d \cdot z^{-d-1} - K2_d \cdot z^{-d-2}} = \frac{1}{(1 - p_1 z^{-1}) \cdot (1 - p_2 z^{-1}) \cdot \dots \cdot (1 - p_{d+2} z^{-1})}. \quad (11)$$

Отсюда, передаточная функция фильтра, соответствующая разностному уравнению (8), может быть задана следующим выражением:

$$H_K(z) = H_1(z) \cdot H_2(z) \cdot H_3(z). \quad (12)$$

Подставляя в (12) значения  $H_1(z)$ ,  $H_2(z)$  и  $H_3(z)$  из (9), (10) и (11), получим

$$\begin{aligned} H_K(z) &= \frac{(b_0 + b_1 \cdot z^{-1} + b_2 \cdot z^{-2}) \cdot (1 + A_1 \cdot z^{-1} + \dots + A_d \cdot z^{-d})}{1 - K1_d \cdot z^{-d-1} - K2_d \cdot z^{-d-2}} = \\ &= \frac{((1 - z_1 \cdot z^{-1}) \cdot (1 - z_2 \cdot z^{-1})) \cdot ((1 - z_3 \cdot z^{-1}) \cdot \dots \cdot (1 - z_{d+2} \cdot z^{-1}))}{(1 - p_1 z^{-1}) \cdot (1 - p_2 z^{-1}) \cdot \dots \cdot (1 - p_{d+2} z^{-1})}, \end{aligned} \quad (13)$$

где  $z_1$ , и  $z_2$  являются корнями полинома  $b_0 + b_1 \cdot z^{-1} + b_2 \cdot z^{-2}$ ,

$z_3, \dots, z_{d+2}$  – корни полинома  $1 + A_1 \cdot z^{-1} + \dots + A_d \cdot z^{-d}$ ,

$p_1, p_2, \dots, p_{d+2}$  – корни полинома  $1 - K1_d \cdot z^{-d-1} - K2_d \cdot z^{-d-2}$ .

Представим полином знаменателя передаточной функции (13) в виде произведения двух полиномов

$$1 - K1_d \cdot z^{-d-1} - K2_d \cdot z^{-d-2} = (1 + a_1 \cdot z^{-1} + a_2 \cdot z^{-2}) \cdot (1 + A_1 \cdot z^{-1} + \dots + A_d \cdot z^{-d}). \quad (14)$$

Раскроем скобки и сгруппируем подобные члены по степеням  $z^{-i}$ . В результате получим

$$\begin{aligned} &1 + (a_1 + A_1) \cdot z^{-1} + (a_2 + a_1 \cdot A_1 + A_2) \cdot z^{-2} + \\ &+ (a_2 \cdot A_1 + a_1 \cdot A_2 + A_3) \cdot z^{-3} + \dots + (a_2 \cdot A_{d-2} + a_1 \cdot A_{d-1} + A_d) \cdot z^{-d} + \\ &+ (a_2 \cdot A_{d-1} + a_1 \cdot A_d) \cdot z^{-d-1} + (a_2 \cdot A_d) \cdot z^{-d-2}. \end{aligned} \quad (15)$$

Справедливость (14) будет доказана, если в показать, что коэффициенты при  $z^{-1}$ ,  $z^{-2}$ , ...,  $z^{-d}$  в (15) равны нулю. Для этого получим рекурсивные формулы для  $A_i$ ,  $K1_i$ ,  $K2_i$ .

Запишем уравнение (8) для уровня конвейеризации  $d = i - 1$ :

$$y_n = v_n + A1 \cdot v_{n-1} + A2 \cdot v_{n-2} + \dots + A_{i-1} \cdot v_{n-i+1} + K1_{i-1} y_{n-i} + K2_{i-1} y_{n-i-1}. \quad (16)$$

Запишем уравнение вида (3) для  $y_{n-i}$ :

$$y_{n-i} = v_{n-i} - a_1 y_{n-i-1} - a_2 y_{n-i-2}. \quad (17)$$

Подставим (17) в (16) и после преобразований получим

$$\begin{aligned} y_n &= v_n + A1 \cdot v_{n-1} + A2 \cdot v_{n-2} + \dots + A_{i-1} \cdot v_{n-i+1} + K1_{i-1} \cdot v_{n-i} - \\ &- (a_1 \cdot K1_{i-1} - K2_{i-1}) \cdot y_{n-i-1} - a_2 \cdot K1_{i-1} \cdot y_{n-i-2}. \end{aligned}$$

Отсюда, параметры уравнения (8) для  $i = 1, 2, \dots$  определяются следующим образом:

$$\begin{aligned} A_i &= K1_{i-1}; \\ K1_i &= -a_1 \cdot K1_{i-1} + K2_{i-1}; \\ K2_i &= -a_2 \cdot K1_{i-1}, \end{aligned}$$

при начальных условиях  $K1_0 = -a_1$ ,  $K2_0 = -a_2$  или

$$A_i = -a_1 \cdot A_{i-1} - a_2 \cdot A_{i-2}; \quad (18)$$

$$K1_i = -a_1 \cdot A_i - a_2 \cdot A_{i-1}; \quad (19)$$

$$K2_i = -a_2 \cdot A_i, \quad (20)$$

при начальных условиях  $A_0 = 1, A_{-1} = 0$ .

На основании (18) можно записать  $A_1 = -a_1, A_2 = a_1^2 - a_2$ , поэтому коэффициенты при  $z^{-1}$  и  $z^{-2}$  равны нулю. В силу (18) для  $i = 3, \dots, d$  все трехчлены вида  $(a_2 \cdot A_{i-2} + a_1 \cdot A_{i-1} + A_i)$  также равны нулю. Коэффициенты  $a_2 \cdot A_{d-1} + a_1 \cdot A_d = -K1_d, a_2 \cdot A_d = -K2_d$  в соответствии с (19) и (20). Таким образом, справедливость (14) доказана.

Теперь передаточная функция  $H_K(z)$  может быть представлена в следующем виде:

$$H_K(z) = \frac{b_0 + b_1 \cdot z^{-1} + b_2 \cdot z^{-2}}{1 + a_1 \cdot z^{-1} + a_2 \cdot z^{-2}} \cdot \frac{1 + A_1 \cdot z^{-1} + \dots + A_d \cdot z^{-d}}{1 + A_1 \cdot z^{-1} + \dots + A_d \cdot z^{-d}} = H_H(z) \cdot H1_K(z).$$

Здесь  $H_H(z)$  – передаточная функция исходного фильтра второго порядка (2);  $H1_K(z)$  – фильтр с передаточной функцией:

$$H1_K(z) = \frac{1 + A_1 \cdot z^{-1} + \dots + A_d \cdot z^{-d}}{1 + A_1 \cdot z^{-1} + \dots + A_d \cdot z^{-d}} = \frac{(1 - z_3 z^{-1}) \cdot (1 - z_4 z^{-1}) \dots (1 - z_{d+2} z^{-1})}{(1 - p_3 z^{-1}) \cdot (1 - p_4 z^{-1}) \dots (1 - p_{d+2} z^{-1})}.$$

Этот фильтр включен последовательно с исходным фильтром. Будем называть фильтр  $H1_K(z)$  *конвейеризующим фильтром*. Этот фильтр возник вследствие эквивалентных преобразований разностного уравнения (1) в разностное уравнение вида (8), описывающее конвейеризованный фильтр с уровнем конвейеризации  $d$ . Причем ввиду того, что в числителе и знаменателе передаточной функции конвейеризующего фильтра стоят одинаковые полиномы, ее полюсы и нули совпадают  $p_3 = z_3, p_4 = z_4, \dots, p_{d+2} = z_{d+2}$ .

Анализируя передаточную функцию конвейеризованного фильтра  $H_K(z)$ , можно сделать следующие выводы:

– следствием эквивалентных преобразований по методу опережающих вычислений явилось то, что к исходному фильтру с передаточной характеристикой  $H_H(z)$  *добавился дополнительный фильтр с передаточной характеристикой  $H1_K(z)$* ;

– передаточная функция  $H1_K(z)$  имеет совпадающие полюсы и нули  $p_3 = z_3, p_4 = z_4, \dots, p_{d+2} = z_{d+2}$  и, следовательно, *является передаточной функцией всепропускающего фильтра, для которого амплитудно-частотная характеристика (АЧХ) равна 0 дБ, а фазочастотная характеристика (ФЧХ) равна 0 во всем диапазоне частот [7]*. Поэтому добавление такого всепропускающего фильтра к исходному фильтру второго порядка не изменяет избирательных свойств исходного фильтра;

– *коэффициенты полинома знаменателя передаточной функции  $H_K(z)$  при  $z^{-1}, z^{-2}, \dots, z^{-d}$  равны нулю*. В ГПД конвейеризованного фильтра, показанного на рис. 2, это соответствует отсутствию отводов с устройствами умножения после регистров 17, 18, ...19. Именно это и позволяет перераспределить  $d$  регистров по циклам рекурсивной части фильтра, минимизируя период итерации ГПД;

– с подключением к исходному фильтру дополнительного фильтра *порядок общей передаточной функции  $H_K(z)$  увеличился*, добавились полюсы  $p_3, p_4, \dots, p_{d+2}$ , и поэтому необходимо исследовать устойчивость полученного конвейеризованного фильтра.

## Анализ устойчивости конвейеризованного рекурсивного фильтра

В дальнейших рассуждениях будем полагать, что исходный фильтр второго порядка с передаточной функцией (2), подвергаемый конвейеризации, устойчив –  $|p_1| < 1, |p_2| < 1$ .

Описанная выше процедура конвейеризации исходного фильтра не изменяет значения полюсов  $p_1, p_2$ , а лишь добавляет  $d$  дополнительных полюсов  $p_3, p_4, \dots, p_{d+2}$ . Для анализа устойчивости полученного конвейеризованного фильтра достаточно определить максимальный модуль среди дополнительных полюсов  $p_3, p_4, \dots, p_{d+2}$  и сравнить его с единицей.

Сформируем функцию  $mp(d)$  вида  $mp(d) = \max_d(|p_3|, |p_4|, \dots, |p_{d+2}|)$ . Функция  $mp(d)$  равна модулю максимального дополнительного полюса в зависимости от уровня конвейеризации фильтра. Если  $mp(d)$  больше единицы, то конвейеризованный фильтр неустойчив. Графики функции  $mp(d)$  для трех вариантов полиномов знаменателей фильтров второго порядка показаны на рис. 3. Там же показана граница устойчивости – горизонтальная пунктирная линия на уровне единицы.

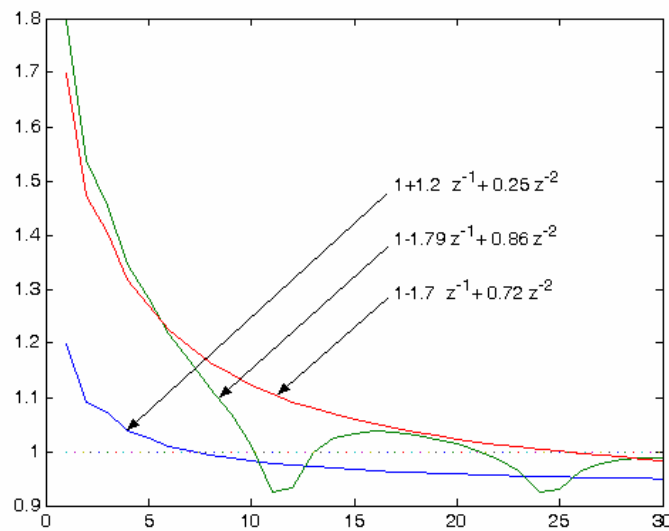


Рисунок 3 – Графики функций  $mp(d)$  для трех вариантов полиномов знаменателя

Как видно из рис. 3, в приведенных примерах уже при  $d = 1$  наблюдается потеря устойчивости. С ростом  $d$  конвейеризованные фильтры стремятся к устойчивости с различной скоростью. В одном из примеров, ввиду немонотонности функции  $mp(d)$ , наблюдается чередование зон устойчивости с зонами неустойчивости.

Анализ устойчивости фильтра удобно проводить с помощью системы математического моделирования MatLab. Программа анализа приведена на рис. 4. Исходными данными для программы являются:

– коэффициенты  $b_0, b_1, b_2$ , и  $a_1, a_2$  полиномов числителя и знаменателя передаточной функции исходного рекурсивного фильтра второго порядка;

–  $D$  – максимальное значение уровня конвейеризации фильтра, до которого ведется исследование.

В результате работы программы выводятся:

– график функции  $mp(d)$  для исследуемого фильтра;

– карта дополнительных нулей и полюсов на  $Z$ -плоскости. Дополнительные полюсы и нули возникли при конвейеризации исходного фильтра второго порядка до уровня  $d = D$ ;

– карта нулей и полюсов исходного фильтра второго порядка.

При необходимости средствами системы MatLab можно получить числовые значения всех величин и переменных, которые рассчитываются в процессе выполнения данной программы.

```
% Программа 1 %%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%
clear; % Сброс всех переменных %%%
b0=1.1; b1=2.3; b2=2.1; a1=1.2; a2=0.25; % Коэфф.исходного.фильтра %%
D=50; %Уровень конвейеризации до которого проводится анализ %%%

% Формиров. коэфф. полинома A1, A2, ..., AD по формуле (18) %%%
A1(1)=0; %A1(1) - это A(-1) Начальное значение A1(-1) %%
A1(2)=1; %A1(2) - это A(0) Начальное значение A1(0) %%
for d=1:D %%%
    A1(d+2)=-a1*A1(d+1)-a2*A1(d); %%
    A(d)=A1(d+2); %%
end %%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%

% Формирование векторов коэфф. А полиномов H2(z) порядка 1, 2, ... D %%%
% (см. формулу (10)) и нахождение макс. модуля корней этих полиномов %%
for d=1:D %%%
    AA(1)=1; %%
    for dd=1:d %%%
        AA(dd+1)=A(dd); %Формирование полинома проядка dd %%
    end %%
    pp=roots(AA); %Вектор столбец полюсов полинома AA порядка d %%
    p=abs(pp); %Вектор столбец модулей полюсов полинома порядка d %%
    MP(d)=max(p); %Вектор максимумов модулей корней полиномов %%
end %%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%

% Вывод результатов %%%
d=1:D; %%
plot(d,MP(d)) %График максимумов модулей корней полиномов от d %%
figure %%
zplane(pp,pp) %График ДОПОЛНИТЕЛЬНЫХ нулей и полюсов конвейериз.фильтра %%
a=[1 a1 a2]; b=[b0 b1 b2]; %%
figure %%
zplane(b,a) %График нулей и полюсов исходного фильтра %%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%
```

Рисунок 4 – Программа исследования устойчивости конвейеризованных фильтров



условия (25) – (27). Следует отметить, что одно из решений системы уравнений (22) – (24) соответствует корням полинома знаменателя передаточной функции, полученного методом опережающих вычислений.

Пусть в результате решения системы (22) – (25) получены корни  $p'_3, p'_4, \dots, p'_{d+2}$ . В этом случае полином знаменателя будет иметь вид

$$P'_{den}(z) = 1 + K1_d(p_1, p_2, p'_3, \dots, p'_{d+2})z^{-(d+1)} + K2_d(p_1, p_2, p'_3, \dots, p'_{d+2})z^{-(d+2)}.$$

Для того чтобы избирательные свойства исходного фильтра не изменились, необходимо компенсировать добавочные корни знаменателя  $p'_3, p'_4, \dots, p'_{d+2}$  равными им нулями полинома числителя (numerator)

$$P'_{num}(z) = (b_0 + b_1 \cdot z^{-1} + b_2 \cdot z^{-2})(1 - p'_3 z^{-1}) \cdot \dots \cdot (1 - p'_{d+2} z^{-1}).$$

При таком полиноме числителя передаточной функции каждому дополнительному полюсу  $p'_3, p'_4, \dots, p'_{d+2}$  будет соответствовать такое же количество *совпадающих* с ними нулей. Это будет означать, что к исходному фильтру второго порядка с целью конвейеризации добавлен не искажающий фазу всепропускающий фильтр.

Полином числителя целесообразно преобразовать к виду, удобному для технической реализации:

$$P'_{num}(z) = (b_0 + b_1 \cdot z^{-1} + b_2 \cdot z^{-2})(1 + A_1 \cdot z^{-1} + A_2 \cdot z^{-2} + \dots + A_d \cdot z^{-d}),$$

где  $A_1 = A_1(p'_3, p'_4, \dots, p'_{d+2})$ ,  $A_2 = A_2(p'_3, p'_4, \dots, p'_{d+2})$ ,  $A_d = A_d(p'_3, p'_4, \dots, p'_{d+2})$  – коэффициенты полинома числителя передаточной функции  $H1_K(z)$  конвейеризирующего фильтра, являющиеся функциями дополнительных полюсов  $p'_3, p'_4, \dots, p'_{d+2}$ .

Передаточная функция конвейеризованного фильтра может быть записана в виде

$$H_K(z) = \frac{(b_0 + b_1 \cdot z^{-1} + b_2 \cdot z^{-2})(1 + A_1 \cdot z^{-1} + A_2 \cdot z^{-2} + \dots + A_d \cdot z^{-d})}{1 + K1_d(p_1, p_2, p'_3, \dots, p'_{d+2})z^{-(d+1)} + K2_d(p_1, p_2, p'_3, \dots, p'_{d+2})z^{-(d+2)}}.$$

ГПД конвейеризованного фильтра с передаточной функцией показан на рис. 2.

Система уравнений (22) – (24) имеет определенную структуру, связанную с особенностью ее формирования. Так, например, порядок уравнений в системе возрастает с 1 до  $d$ , вследствие чего количество решений системы равно  $d!$ . Среди этих решений может оказаться и решение, удовлетворяющее условиям (25) – (27).

Если же такого решения не окажется, то необходимо использовать методы, позволяющие получить большее количество решений обусловленной системы (22) – (24). Для этого можно задать один из полюсов, например  $p_{d+2}$ , как параметр  $p_p$ , соблюдая условие (27), и исключить из системы одно из уравнений, например (24), как имеющее наибольшую степень. В этом случае получаем бесконечное количество параметризованных решений системы, в том числе и таких, которые удовлетворяют условиям ограничения модулей корней.

Сформулируем алгоритм, который позволяет конвейеризовать фильтр второго порядка до уровня  $d-1$  и получить устойчивый конвейеризованный фильтр с сохранением избирательных свойств исходного фильтра.

1°. Выбираем уровень конвейеризации  $d-1$ , то есть количество дополнительных регистров в циклах рекурсивной части фильтра, необходимое для минимизации периода итерации.

2°. Получаем выражение для знаменателя передаточной функции  $H_K(z)$  в виде (16).

3°. Определяем один из корней, например  $p_{d+2}$ , как параметр и назначаем его  $p_{d+2} = p_p$ .

4°. Формируем обусловленную систему нелинейных уравнений вида (22) – (24), (25) – (27), учитывая, что  $p_{d+2} = p_p$ .

5°. Решаем систему (22) – (24) относительно  $p_3, p_4, \dots, p_{d+1}$ , подбирая параметр  $p_p$  с целью выполнения условий (25) – (27), и получаем значения полюсов  $p_3'', p_4'', \dots, p_{d+1}''$  передаточной функции.

6°. Получаем значения коэффициентов  $K1_d(p_1, p_2, p_3'', \dots, p_{d+1}'', p_p)$ ,  $K2_d(p_1, p_2, p_3'', \dots, p_{d+1}'', p_p)$  и  $K3_d(p_1, p_2, p_3'', \dots, p_{d+1}'', p_p)$  полинома знаменателя передаточной функции  $H_K(z)$ .

$$P_{den}''(z) = 1 + K1_d(p_1, p_2, p_3'', \dots, p_{d+1}'', p_p)z^{-d} + K2_d(p_1, p_2, p_3'', \dots, p_{d+1}'', p_p)z^{-(d+1)} + K3_d(p_1, p_2, p_3'', \dots, p_{d+1}'', p_p)z^{-(d+2)}.$$

7°. Получаем значения коэффициентов  $A_1 = A_1(p_3'', \dots, p_{d+1}'', p_p)$ ,  $A_2 = A_2(p_3'', \dots, p_{d+1}'', p_p)$ ,  $A_d = A_d(p_3'', \dots, p_{d+1}'', p_p)$  полинома числителя передаточной функции  $H_K(z)$ .

8°. Формируем конвейеризованный фильтр с передаточной функцией

$$H_K(z) = \frac{(b_0 + b_1 \cdot z^{-1} + b_2 \cdot z^{-2})(1 + A_1 \cdot z^{-1} + A_2 \cdot z^{-2} + \dots + A_d \cdot z^{-d})}{P_{den}''(z)}.$$

Структура конвейеризованного устойчивого фильтра показана на рис. 5.

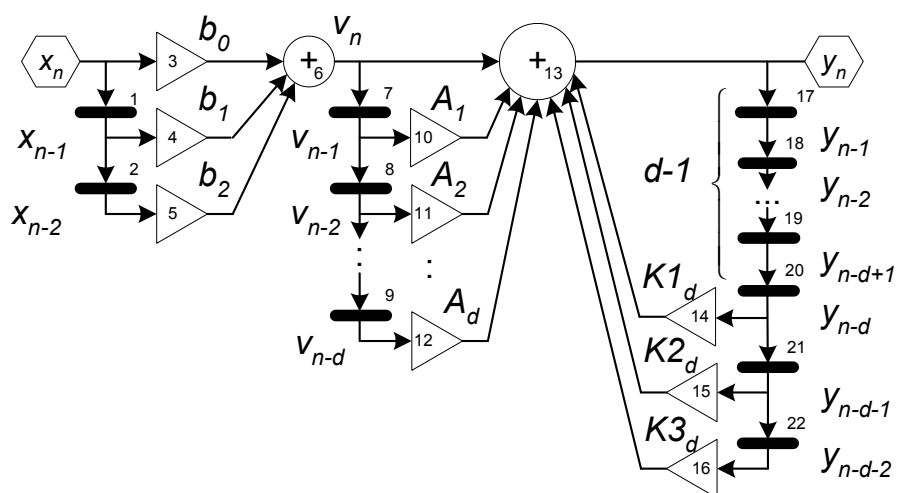


Рисунок 5 – Структура устойчивого конвейеризованного фильтра

Фильтр в дальнейшем подвергается процедуре ресинхронизации для получения минимального периода итерации  $T_{II}$ .

## Заключение

В статье предложен алгоритм построения устойчивых конвейеризованных фильтров второго порядка, который позволяет корректно добавить в обратные связи рекурсивного фильтра необходимое количество дополнительных регистров и использовать их для конвейеризации операционных устройств с целью уменьшения периода итерации рекурсивной схемы. При этом конвейеризованный фильтр сохраняет устойчивость и избирательные свойства исходного фильтра.

Предложенный подход может использоваться для конвейерной реализации различных рекурсивных схем, в частности, не связанных с цифровой фильтрацией.

## Литература

1. Коуги П.М. Архитектура конвейерных ЭВМ: Пер. с англ. – М.: Радио и связь, 1985.
2. Пархи К.К. // ТИИЭР. – 1987. – Т. 77, № 12. – С. 96-114.
3. Сергиенко А.М. VHDL для проектирования вычислительных устройств. – Киев: Изд-во “ЧП «Корнейчук», ООО «ТИД «ДС»», 2003. – 208 с.
4. Nigel Boston. Pipelined iir filter architecture using pole-radius minimization / Departments of Mathematics and Electrical and Computer Engineering, University of Wisconsin, Madison, WI 53706 (<http://www.math.wisc.edu/~boston/newfilter.pdf>).
5. John Wiley & Sons. VLSI Digital Signal Processing Systems: Design and Implementation. – 1999 // <http://www.ece.umn.edu/users/parhi>.
6. Ли Е.А., Мессершмитт Д.Г. // ТИИЭР. – 1987. – Т. 75, № 9. – С. 107-119.
7. Сергиенко А.Б. Цифровая обработка сигналов. – М.; СПб.: Питер, 2002. – 604 с.

**Є.А. Семерніков**

### **До питання стійкості конвеєрних рекурсивних фільтрів**

У статті аналізується вплив методу випереджальних обчислень на передатну функцію і стійкість рекурсивного фільтра, що піддається конвеєризації. На підставі аналізу отриманої передатної функції досліджуються причини, що приводять конвеєризований фільтр до нестійкості. Пропонується алгоритм, що дозволяє одержати стійкий конвеєризований фільтр.

**E.A. Semernikov**

### **To the Question of Robustness of Pipelined Recursive Filters**

In the article is analysed the influence of the method of advanced calculations on transfer function and robustness of pipelined recursive filter. On basis of analysis of obtained transfer function the reasons of pipelined filter instability are analysed. The algorithm which allows to obtain robust pipelined filter is suggested.

*Статья поступила в редакцию 18.07.2005.*