3-3

УДК 519.87

В.Е. Золотовский, Д.В. Золотовский
Государственное образовательное учреждение высшего профессионального образования «Таганрогский государственный радиотехнический университет», г. Таганрог, Россия
zol@dce.tsure.ru

Методы решения систем линейных алгебраических уравнений с коэффициентами заданными полями

Рассматривается метод ускорения сходимости и снижения вычислительной сложности решения алгебраических систем при переменной разрядности исходных данных. Метод позволяет ускорить процесс за счёт применения быстрого алгоритма и работы с усечёнными данными (неполной разрядностью).

Одной из основных операций, которые широко используются в системах моделирования, является отыскание решения систем линейных алгебраических уравнений (СЛАУ).

Это связано с тем, что большое число вычислительных методов, используемых в системе структурного моделирования, такие, как цифровое интегрирование, связывание объектов и некоторые другие, приводят к операции отыскания корней системы линейных алгебраических уравнений (СЛАУ). С другой стороны, совместное решение дифференциальных и алгебраических уравнений в системах моделирования в отдельных случаях требует высокой точности. Некоторые задачи математической физики, моделирования движения тел в астрономии требуют значительно большей разрядности, чем это реализовано в стандартных методах. Прямое увеличение разрядности вычислителей

$$\mathrm{A}x + \mathrm{B} = 0. \qquad (1)$$

Существует достаточно большое число методов решения СЛАУ, которые можно разделить на точные и приближенные. К точным методам относятся методы, не имеющие внутренней вычислительной погрешности. Здесь и далее погрешность представления данных не учитывается. Первым, кто сформулировал правило нахождения решения систем линейных уравнений и сформулировал условие его единственности ($\det \mathrm{A} \neq 0$, где A – исходная матрица), был швейцарский математик Г. Крамер. Однако вычислительная сложность метода Крамера не позволяет использовать его в реальных системах.

Метод Гаусса является наиболее распространенным приемом прямого решения СЛАУ. Так как метод используется достаточно часто при моделировании, то в системе создается банк матриц, для которых заранее определен блок формул для расчета коэффициентов. Например, для матрицы (1) размером 4х4 имеем

$$\mathrm{A} = \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} & a_{14} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} & a_{24} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} & a_{34} \\ a_{41} & a_{42} & a_{43} & a_{44} \end{vmatrix}; \quad \mathrm{C} = \begin{vmatrix} c_1 \\ c_2 \\ c_3 \\ c_4 \end{vmatrix}; \quad B = \begin{vmatrix} 1 & b_{1.2} & b_{1.3} & b_{1.4} \\ 0 & 1 & b_{2.3} & b_{2.4} \\ 0 & 0 & 1 & b_{3.4} \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{vmatrix},$$

где $b_{1.2} = \frac{a_{1.2}}{a_{1.1}}, \quad b_{1.3} = \frac{a_{1.3}}{a_{1.1}}, \quad b_{1.4} = \frac{a_{1.4}}{a_{1.1}},$

$$b_{2.3} = \left(a_{2.3} - \frac{a_{1.3}}{a_{1.1}} \cdot a_{2.1}\right) \cdot \left(a_{2.2} - \frac{a_{1.2}}{a_{1.1}} \cdot a_{2.1}\right),$$

$$b_{2.4} = \left(a_{2.4} - \frac{a_{1.4}}{a_{1.1}} \cdot a_{2.1}\right) \cdot \left(a_{2.2} - \frac{a_{1.2}}{a_{1.1}} \cdot a_{2.1}\right),$$

$$b_{3.4} = \frac{b''_{3.4}}{b_{3.3}}, \quad b_{3.4} = b'_{3.3} \cdot b'_{3.2} - b_{2.3}, \quad b''_{3.4} = b'_{3.4} \cdot b'_{3.2} - b_{2.4},$$

$$b'_{3.2} = (a_{3.2} - b_{1.2} \cdot a_{3.1}), \quad b'_{3.4} = (a_{3.4} - b_{1.4} \cdot a_{3.1}), \quad b'_{3.3} = (a_{3.3} - b_{1.3} \cdot a_{3.1}).$$

Если требуется найти матрицу 5х5, то пересчёт полученных выражений не требуется. Достаточно произвести изменения индексов. Действительно для первого уравнения $b_{1.5} = \frac{a_{1.5}}{b_{1.1}}, \quad b_{2.5} = \frac{\left(a_{2.5} - \frac{a_{1.5}}{a_{1.1}} \cdot a_{1.2}\right)}{a_{2.2} - \frac{a_{1.2}}{a_{1.1}} \cdot a_{2.1}}.$

$$b_{3.5} = \frac{b''_{3.5}}{b_{3.3}}, \text{ где } b''_{3.5} = b'_{3.5} \cdot b'_{3.2} - b_{1.5}, \quad b'_{3.5} = (a_{3.5} - b_{1.5} \cdot a_{3.1}).$$

Соответственно для свободных членов

$$d_1 = \frac{c_1}{a_{1.1}}, \quad d_2 = \frac{c_2}{a_{2.2} - \frac{a_{1.2}}{a_{1.1}} \cdot a_{2.1}}, \quad d_3 = -\frac{c_3}{b_{3.3}},$$

где $b_{4.4} = b''_{4.4} - b_{3.4} \cdot b''_{4.3}, \quad b''_{4.4} = b'_{4.4} - b_{2.3} \cdot b'_{4.2}, \quad b''_{4.3} = b'_{4.3} - b_{2.3} \cdot b'_{4.2},$

$$b'_{4.2} = (a_{4.2} - b_{1.2} \cdot a_{4.1}), \quad b'_{4.3} = a_{4.3} - b_{1.2} \cdot a_{4.1}, \quad b'_{4.4} = a_{4.4} - b_{1.2} \cdot a_{4.1}.$$

При увеличении размерности изменяется лишь последний член

$$d_5 = \frac{c_5}{b_{5.5}}, \quad b_{5.5} = b''_{5.5} - b_{4.5} \cdot b'_{5.2}, \quad b''_{5.5} = b''_{5.5} - b.$$

Таким образом, система подготавливает список аналитических выражений для вычислений элементов треугольной матрицы. Затем по известным значениям элементов матрицы определяются элементы треугольной матрицы. При работе с полями, так как длина слова достаточно велика, время выполнения операций существенно возрастает, и для сохранения приемлемого времени выполнения необходимо либо суммировать размерность матрицы, либо использовать распараллеливания вычислительного процесса.

Итерационные методы решения систем линейных алгебраических уравнений

При работе с полями прямой метод даже при умеренных размерах матрицы требует значительного числа арифметических действий под группами полей исходных данных. Так что он может быть использован лишь для систем, матрица которых не изменяется в течение всего вычислительного процесса, что допускает определения коэффициентов преобразованных матриц до начала процесса. В большинстве случаев это невозможно.

В этих условиях более рационально использованы итерационные методы, которые хоть и требуют большего числа шагов для достижения заданной точности, однако на каждом шаге число действий оказывается небольшим. Рассмотрим это на примере метода интеграций. В данном методе исходная система линейных уравнений приводится к виду $x = -Ax + b$.

Например, следующим образом $-Ex + (E - A)x + b = 0$, тогда

$$X = (E - A)\,X + b.$$

Итерационный процесс организуется следующим образом:

$$X_{k+1} = (E - A)\,X_k + b. \tag{2}$$

Для вычислений x_k перейдём к приращениям неизвестных. Для этого вычтем из x_{k+1} значения предыдущего шага.

$$\nabla x_{k+1} = (E - A)\cdot\nabla x_k\,,$$

где $\nabla x_{k+1} = x_{k+1} - x_k$, $\quad \nabla x_k = x_k - x_{k-1}$.

Начальное значение $\nabla x_0 = b - x$, чтобы уменьшить разрядность представления приращений, осуществим операцию квантования приращений. Для этого разобьём приращение ∇x_k на старшую ∇z_k и младшую z_k части.

Тогда $\nabla z_k = P_0^{-m}\nabla x_k$, $z_k = P_{-m}^{-m(N-1)}$ и $\nabla x_k = \nabla z_k + z_k$. Здесь ∇z_k – квантованное приращение, z_k – остаток, а P_{-r}^{-m} - функция выделения разрядов от r до m (минус указывает, что выделяются дробные разряды числа, плюс – целые).

Откуда

$$\nabla x_{k+1} = (E - A)\cdot\nabla z_k \qquad \text{и}$$

$$\left\{\begin{aligned} \nabla z_{k+1} &= P_0^{-m}(\nabla x_{k+1} + z_k), \\ z_{(k+1)} &= P_{-m}^{-m(N-1)}(z_k + (\nabla x_k - \nabla x_k) \end{aligned}\right\} \tag{3}$$

Обычно в качестве текущего приращения выбирается его старшая группа, следовательно, остаток – все остальные группы. При достижении ситуации, когда старшая группа обнуляется или приращение колеблется относительно некоторого малого значения, тогда формируется новое значение вектора свободных членов:

$$Ax + b = c.$$

Учитывая, что точное значение равно $A(\bar{x} + \bar{y}) + b = 0$, то имеем

$$AY + C = 0. \tag{4}$$

Данная система позволяет определить следующую группу результата. И так до получения необходимого числа групп.

Пример

Пусть необходимо найти решения системы $Ax – B = 0$ итерационным методом. Матрица A имеет размер 2х2. Коэффициенты и свободные члены представлены полями, состоящими из 4 групп, по 4 разряда каждая.

Тогда

$a_{1.1}$ = 0.0000, 0.1100 0.0110 0.1001 0.1111… ($a_{1.1}$ = 0.7756347)
$a_{1.2}$ = 0.0000, 0.0011 0.1011 0.1011 0.1111… ($a_{1.2}$ = 0.2333983)
$a_{2.1}$ = 0.0000, 0.0100 0.0011 0.1100 0.1111… ($a_{2.1}$ = 0.5148924)
$a_{2.2}$ = 0.0000, 0.1110 0.0111 0.0010 0.0000… ($a_{2.2}$ = 0.9028390)
b_1 = 0.0000, 0.1000 0.0010 0.0011 0.1010… (b_1 = 0.5087072)
b_2 = 0.0010, 0.0100 0.0101 0.0110 0.0001 0.1011… (b_2 = 2.2710219)

Чтобы не вести операции в двоичной системе, будем преобразовывать значение группы в десятичный код.

Преобразуем исходную систему к виду (2):

$$\begin{aligned}\nabla \mathrm{x}_1^{\mathrm{k}} &= (1-\mathrm{a}_{1.1})\cdot \nabla \mathrm{x}_1^{\mathrm{k}-1} - \mathrm{a}_{1.2}\cdot \nabla \mathrm{x}_1^{\mathrm{k}-1},\\ \nabla \mathrm{x}_2^{\mathrm{k}} &= (-\mathrm{a}_{2.1})\cdot \nabla \mathrm{x}_1^{\mathrm{k}-1} - (1-\mathrm{a}_{2.2})\cdot \nabla \mathrm{x}_1^{\mathrm{k}-1}.\end{aligned} \tag{5}$$

1 шаг

Величина z^0 равна свободному члену b_1 аналогично z_2^0,
т.е. $z_1^0 = b_1$, $z_2^0 = b_2$. z_1^0 = 0.1000 0 .0011 … ≈ 0.5078, z_2^0 = 9.2695,

$$\nabla x_1^0 = 0,\ \ z_1^0 = 0.5078$$

$$\nabla x_2^0 = 2,\ \ z_2^0 = 0.2695.$$

2 шаг

$$\nabla x_1^1 = -a_{1.2}\cdot \nabla\overline{x}_2^0 + z_1^0 = 0.04100\ \ \nabla x_1^2 = (1-a_{1.2})\cdot \nabla\overline{x}_2^0 + z_2^0 = 0.0463822$$

$$\nabla x_2^1 = 0,\ \ \nabla z_1^1 = 0.04100,\ \ \nabla\overline{x}_2^1 = 0.4375,\ \ z_2^1 = 0.0263322.$$

3 шаг

$$\nabla x_1^2 = -a_{1.2}\cdot \nabla\overline{x}_2^1 + z_1^1 = 0.0611117\ \ \nabla x_2^2 = a_{2.2}\cdot \nabla x_2^1 + z_2^1 = 0.06883$$

$$\nabla\overline{x}_1^2 = -0.0625\ \ z_1^2 = 0.001459,\ \ \nabla\overline{x}_2^2 = 0.0625\ \ z_2^2 = 0.03125.$$

4 шаг

$$\nabla x_1^3 = a_{1.1}\cdot \nabla\overline{x}_1^2 - a_{1.2}\cdot \nabla\overline{x}_2^2 + \cdot z_1^2 = -0.0271511,\ \nabla x_2^3 = -a_{2.1}\cdot \nabla\overline{x}_1^2 + a_{2.2}\cdot \nabla\overline{x}_1^2 = -0.0382532,$$

$$\nabla x_1^3 = -0.625,\ \ z_1^3 = 0.0390625,\ \ \nabla x_2^3 = 0,\ \ z_2^3 = 0.0382532.$$

5 шаг

$$\nabla x_1^4 = a_{1.2}\cdot \nabla\overline{x}_1^3 + z_1^3 = -0.0250397,\ \nabla x_1^4 = 0,\ \ z_1^4 = 0.0250397$$

$$\nabla x_2^4 = -a_{2.1}\cdot \nabla\overline{x}_1^3 + z_2^3 = 0.07043,\ \nabla x_2^4 = 0.0625,\ \ z_2^4 = 0.007910.$$

6 шаг

$$\nabla x_1^5 = a_{1.2}\cdot \nabla\overline{x}_2^4 + z_1^4 = 0.01045,\ \nabla x_1^5 = 0,\ \ z_1^5 = 0.01045$$

$$\nabla x_2^5 = a_{2.2}\cdot \nabla\overline{x}_2^5 + z_2^4 = 0.0165225,\ \nabla\overline{x}_2^5 = 0,\ \ z_2^5 = 0.0165225.$$

Так как все приращения равны нулю, этап работы с первой группой поля завершен. Полученное значение $x_1 = \sum_{j=0}^{5} \nabla x_i^j = -0.125,\quad x_2 = \sum_{j=0}^{5} \nabla x_2^j = 2.5625.$

Подставляем значения x_1 и x_2 в исходную систему и корректируем вектор свободных членов.

Итак, $b_1^1 = -a_{1.1}x_1 + (-a_{2.1}x_2) + b_1 = 0.0075784$,

$$b_2^1 = -a_{2.1}x_1 - a_{2.2}x_2 + b_2 = 0.0218586 .$$

Имеем новую систему для отыскания следующей группы $AY + B^1 = 0$.

Указанный процесс продолжается до тех пор, пока не будет определена последняя группа результата.

Следует отметить, что скорость сходимости метода простой итерации имеет первый порядок сходимости, а число интеракций зависит от начального приближения x^0 и нормы матрицы $\|\alpha\|$, согласованной с нормой вектора номинального приближения [1-6]. При $\|\alpha\| < 1$, $\|\varepsilon^K\| \le \|\alpha\|^k \|\varepsilon_0\|$.

Норма матрицы $\|\alpha\|$ может быть определена как $\|\alpha\| = \sum_{j=1}^{n} |a_{i.j}|$ $i = 1, 2, \ldots, n$, или $\|\alpha\| = \sum_{j=1}^{n} |a_{i.j}|$ $j = 1, 2, \ldots, n$.

Несмотря на то, что скорость убывания погрешности не ниже скорости геометрической погрешности q ≈ $\|\alpha\|$, для многих приложений, и особенно при работе с полями, этого оказывается недостаточно.

Для ускорения процесса итерации можно использовать следующий алгоритм. Проведём экстраполяцию на р-шагов. Тогда $x_P = (E - A)\, x_{P-1} + B$. Или относительно вектора начальных значений

$$x_P = (E - A)^P x_0 + \left(\sum_{j=0}^{p-1} (E - A)^j \right) \cdot B .$$

Так как представление коэффициентов матрицы полями возведения матрицы в степень занимает значительное время, то заменим матрицу (Е – Ана матрицу D, которая равна D = (E – A) – ξ, где ξ – матрица погрешности ограничения разрядности.

Нетрудно увидеть, что норма матрицы ξ не превышает значения $\|\xi\| \le 2^{-rm} \cdot n$, где r – число групп, n – размерность исходной матрицы. Так как норма матрицы D приблизительно (с погрешностью не ниже чем $n2^{-rm}$) равна норме матрицы (Е – А), то скорость сходимости увеличивается в р-раз.

Общая схема вычислительного алгоритма имеет следующую последовательность:

1 шаг. Начальное значение $x_0 = B$, определяется текущее значение $x_P = \left(\sum_{j=0}^{p-1} (E - A)^j \right) \cdot B$. Определяем приращения x, оно равно $\nabla x_1 = x_P - x_0 = \nabla \widetilde{x} + z$,

где $\nabla \widetilde{x}$ – квантованное значение приращения вектора неизвестных,

Z_1^π – вектор остатков. (Z^0 – начальный вектор остатков, равен 0).

Квантование осуществляется следующим образом: просматриваются старшие группы вектора приращений, если встречаются одна или более групп, которые больше 1, то формируется вектор приращений по следующему правилу: старшая группа равна приращению, а оставшаяся часть поля суть остаток Z. Таким образом, получим

$$\nabla x_2^2 = (E - A)^P \cdot \nabla x_1^\Phi + Z_1^\Phi$$

или в общем виде

$$\nabla x_{j+1} = (E-A)^P \cdot \nabla x_j + Z_j,\ j = 1, 2, \ldots$$

Процесс прекращается, если все приращения равны нулю. Как и в предыдущем случае, $x_K^* = x_0 + \sum_{r=j+1}^{K} \nabla x_r$.

2 шаг. По найденному значению находим невязку

$$AX_K = B_1. \tag{6}$$

Прибавляя систему к исходной системе, получим

$$A(X_k - \mathrm{X}_\kappa^*) = B - B_1.$$

Обозначим $X_k - \mathrm{X}_\kappa^* = Y$, получим $AY = C$.

Для переменной Y выполняем первый и второй шаг, и так до тех пор, пока не будет определена последняя группа поля результата.

$$Y_K = (E - A)\ Y_{K-i} + C. \tag{7}$$

Вычислительный алгоритм реализуется в следующей последовательности.

Формирование матрицы D.

Сначала определяется верхний уровень погрешности формирования матрицы D, который равен $\|\xi\| = pn2^{-(e-p)} = (p-1)\cdot n \cdot 2^{-(Nm-p+1)}$, где n – размерность матрицы, p – число членов экстраполяции. Пусть $\|\xi\| = 64 * 2^{-(Nm-4)} = 2^{-(Nm-10)}$.

Для сохранения требуемой погрешности определения приращения достаточно удерживать $2 \div 3$ группы, поэтому в данном примере для определения матрицы D в матрице (E – A) сохраним три группы:

$$\begin{vmatrix} a_{1.1} & a_{1.2} \\ 0.7756347 & 0.233983 \\ a_{2.1} & a_{2.2} \\ 0.5148924 & 0.902839 \end{vmatrix} \begin{vmatrix} x_1 \\ x_2 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} 0.5087072 \\ 2.2710220 \end{vmatrix};\ T_1 = (E-A) = \begin{vmatrix} 1-a_{1.1} & -a_{1.2} \\ 0.2243653 & -0.233983 \\ -a_{2.1} & 1-a_{2.2} \\ 0.5148924 & 0.097161 \end{vmatrix},$$

$$T_2 = (E-A)^2 = \begin{vmatrix} d_{1.1} & d_{1.2} \\ 0.1705148 & -0.0750437 \\ d_{2.1} & d_{2.2} \\ -0.1655514 & 0.1296153 \end{vmatrix},$$

и так далее. Соответственно
$D1 = E + T_1$, $D2 = E + T_1 + T_2$, $D3 = E + T_1 + T_2 + T_3$, $D4 = E + T_1 + T_2 + T_3 + T_4$ и $D5 = E + T_1 + T_2 + T_3 + T_4 + T_5$.

Таким образом, учитывая, что норма счётной матрицы близка к 0.7, для определения старшей группы необходимо не более 4 итерационных шагов.

В рассматриваемом методе это соответствует матрицам $D3$ и $D4$. Действиительно, выбирая начальное приближение, равное $b_1 = 0.50$ и $b_2 = 2.25$, что соответствует значению первых групп вектора свободных членов, получим следующие результаты, приведенные в табл. 1.

Таблица 1

Номер шага	D3		D4	
	x_1	x_2	x_1	x_2
1	0.00398	2.42002	– 0.09398	2.524267
2	– 0.10458	2.5635	– 0.12069	2.584942
3	– 0.11964	2.584942	– 0.1219535	2.584942
4	– 0.12168	2.58209		
5	– 0.12195	2.58494		

Как видим, в первом и втором случае на завершающем этапе погрешность не превышает величины 0.0001 (точное значение $x_1 = -0.122$, $x_2 = 2.585$), а число шагов отличается незначительно.

В заключение отметим, что при моделировании переменная разрядность имеет существенное значение, так как позволяет оптимизировать соотношение время/погрешность результатов. Так как при моделировании сложных систем в неё входят объекты, требующие применения различных вычислительных методов, то необходимо, чтобы все они были сбалансированы по параметрам сложности и временным затратам. Предложенный в работе метод, позволяющий существенно снизить временные затраты на решения алгебраических систем, позволит повысить эффективность моделирования объектов, описываемых дифференциально-алгебраическими уравнениями.

Литература

1. Демидович Б.П., Марон И.А. Основы вычислительной математики. – М., 1966. – 664 с.
2. Берёзин И.С., Жидком Н.П. Методы вычислений. – М.: Изд-во «Физматгиз», 1962. – Т. 1. – 464 с.
3. Берёзин И.С., Жидком Н.П. Методы вычислений. – М.: Изд-во «Физматгиз», 1960. – Т. 2. – 680 с.
4. Guzik V., Zolotovsky V., Chernukhi Y., Tretyakov S., Muntyan O., Dougal R. Structural Modeling for Simulation of Power Electronic Systems, Computers in Power Electronics (COMPEL 2000) in Blacksburg, VA, July 16-18, 2000.
5. Золотовский В.Е., Резников В.Б. Система моделирования со структурными принципами программирования // Известия вузов. Приборостроение. Тематический выпуск: «Проектирование аппаратных и программных средств управляющих и информационных систем». – 2003. – Т. 46.
6. Решение математических задач на автоматических цифровых машинах / Л.А. Люстерник, А.А. Абрамов, В.И. Шестаков, М.Р. Шура-Бура. – Изд. АН СССР, 1952.
7. Смирнов В.И. Курс высшей математики. – М.: Изд-во «Физматлит», 1961. – Т. 1.

В.Є. Золотовський, Д.В. Золотовський

Методи розв’язання систем лінійних алгебричних рівнянь з коефіцієнтами заданими полями

Розглядається метод прискорення збіжності і зниження обчислювальної складності розв’язання алгебричних систем при змінній розрядності вихідних даних. Метод дозволяє прискорити процес за рахунок застосування швидкого алгоритму і роботи зі зрізаними даними (неповною розрядністю).

V.Ye. Zolotovsky, A.V. Zolotovsky

Methods for Solving of Linear Algebraic Equation Systems with Factors Given by Fields

It is considered the method of convergence acceleration and computational complexity decreasing of linear algebraic equation systems solving at initial data variable digit capacity. The method allows to accelerate the process at the expense of rapid algorithms using and working with truncated data (uncompleted digit capacity).

Статья поступила в редакцию 04.07.2006.